Vol. 58, No. 2 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © April 1989

GROUPE DE PICARD ET NOMBRES CARACTERISTIQUES DES VARIETES SPHERIQUES

MICHEL BRION

0. Introduction. De nombreux problèmes de géométrie énumérative concernent un espace homogène: par exemple les sous-espaces linéaires de dimension donnée d'un espace projectif, ou les quadriques non singulières. On cherche le nombre de points de cet espace qui satisfont à certaines conditions. Celles-ci peuvent être, pour un espace linéaire, d'avoir un contact d'ordre donné avec une courbe; pour une conique, de passer par un point ou d'être tangente à une droite ... Le théorème de transversalité de Kleiman [Kl1] a pemis de donner un sens à ces problèmes, qui reviennent à intersecter des translatés génériques de sous-variétés de l'espace homogène G/H. Ensuite, DeConcini et Procesi ont défini le groupe des conditions $C^*(G/H)$, muni du produit d'intersection [DP II]. Dans le cas où G/H est un espace *symétrique* (i.e. G est réductif, et H est le sous-groupe des points fixes d'un automorphisme involutif de G), ils ont muni le groupe $C^*(G/H)$ d'une structure (naturelle) d'anneau. Celui-ci est canoniquement isomorphe à une limite d'anneaux de Chow de compactifications G-équivariantes de G/H. Parmi ces compactifications, baptisées "variétés symétriques complètes", on en distingue une plus jolie que les autres. Pour l'espace symétrique des coniques dans le plan, il s'agit de la variété des "coniques complètes", dont la construction remonte à Chasles. DeConcini et Procesi ont donné un algorithme permettant de calculer les *nombres caractéristiques* de cette compactification canonique X, c'est-à-dire les nombres d'intersection des diviseurs de X [DP I]. En outre, ils ont décrit l'anneau de Chow (qui coïncide avec l'algèbre de cohomologie) de certaines variétés symétriques lisses et complètes [DP], [DGMP].

Le groupe des conditions d'une variété de drapeaux généralisée, c'est-à-dire d'un espace homogène complet G/H, est aussi isomorphe à l'anneau de Chow de G/H; ce dernier est bien connu, grâce au "calcul de Schubert". Variétés de drapeaux et variétés symétriques sont des cas particuliers de variétés appelées *sphériques*: dans elles opère un groupe réductif G, dont un sous-groupe de Borel a une orbite ouverte. La géométrie algébrique classique fournit d'autres exemples de variétés sphériques, ni symétriques ni homogènes complètes: citons les coniques dans un espace projectif de dimension n, les variétés déterminantielles ... Pour tout espace homogène sphérique G/H, le groupe $C^*(G/H)$ est encore muni d'une structure d'anneau, canoniquement isomorphe à une limite d'anneaux de Chow de G-compactifications de G/H: en effet la démonstration de [DP II] se transcrit sans changement. Un problème naturel est donc décrire l'algèbre de cohomologie d'une variété sphérique (lisse, complète).

Received March 9, 1988.

Le but, bien plus modeste, de ce travail est de décrire les groupe de Picard des varétés sphériques, et les nombres d'intersection de leurs diviseurs. Pour les variétés X simples (c'est-à-dire où le groupe G n'a qu'une orbite fermée) D. Luna a introduit une "carte" affine canonique. Elle est décrite dans la première partie; on peut ainsi donner quelques résultats sur les singularités des variétés sphériques (lesquelles généralisent les singularités toriques). Dans la seconde partie, on montre que le groupe de Picard de la carte est trivial, et que les composantes irréductibles de son complémentaire dans X sont des diviseurs localement principaux; leurs classes engendrent donc le groupe de Picard de X. On détermine les relations entre ces classes, ainsi que les sections des diviseurs de Cartier (en tant que G-modules). Tout cela utilise la théorie des plongements d'espaces homogènes, due à Luna et Vust.

Le groupe de Picard des variétés sphériques quelconques est décrit dans la troisième partie; comme application, on étend à ces variétés un critère de quasiprojectivité des variétés toriques, dû à Demazure. Dans la quatrième partie sont déterminés les nombres caractéristiques: leur calcul est ramené à l'intégrale d'un polynôme sur un polyèdre convexe, canoniquement attachés à un diviseur ample sur une variété sphérique. On peut ainsi retrouver des résultats de Schubert sur (par exemple) les coniques dans $\mathbb{P}^3$, et expliquer sa "méthode de dégénerescence" dans le cadre des plongements d'espaces homogènes.

Des méthodes de portée plus générale pour déterminer les nombres caractéristiques de variétés avec action d'un groupe réductif, sont esquissées à la fin de ce travail. L'auteur reviendra là-dessus ultérieurement.

1. Structure locale des variétés sphériques simples

1.1. Le corps de base k est algébriquement clos et de caractéristique nulle. Soit X une variété algébrique normale dans laquelle opère un groupe algébrique G, réductif et connexe; X est dite *sphérique* si un sous-groupe de Borel de G a une orbite dense dans X. Sous cette hypothese, G (et même B) n'a en fait qu'un nombre fini d'orbites dans X (voir [B1], [Vin]). Il s'ensuit que pour toute orbite Y de G dans X, l'ensemble $X_{Y,G} = \{x \in X \mid \overline{G \cdot x} \supset Y\}$ est un ouvert de X, stable par G, et contenant Y comme unique orbite fermée de G. On peut ainsi recouvrir X par des variétés sphériques *simples* (i.e. qui ne contiennent qu'une orbite fermée de G).

Désormais, on suppose que X est une variété sphérique simple, avec Y pour G-orbite fermée. Soit $X_{Y,B}$ l'ensemble des $x \in X$ tels que $\overline{B \cdot x}$ contienne Y. C'est un ouvert de X, stable par B, et rencontrant Y suivant l'orbite ouverte de B dans Y; on note celle-ci Y_B^0. La "carte canonique" $X_{Y,B}$ a été introduite par Luna, qui a montré qu'elle est affine. On va préciser la structure de $X_{Y,B}$; le résultat est une généralisation directe de [BLV] Lemma 4.2, et [BP] Proposition 3.4.

Choisissons $x \in X$ tel que l'orbite ouverte $B \cdot x$ soit dense dans X, et notons H le groupe d'isotropie de x dans G. Le couple (X, x) est un *plongement de l'espace homogène sphérique* G/H; pour la description de ceux-ci, voir [LV] et, faute de mieux, [BP], dont nous utiliserons fréquement les résultats.

Notons Δ la réunion des diviseurs irréductibles et stables par B de G/H dont l'adhérence ne contient pas Y. Soit P l'ensemble des $s \in G$ tels que $s\Delta = \Delta$; c'est un sous-groupe parabolique de G qui contient B. On note P^u son radical unipotent.

THÉORÈME. *Il existe un sous-groupe de Levi L de P, et une sous-variété Z de X, avec les propriétés suivantes*:

(i) *Z est affine, stable par L, et contient x.*

(ii) *L'opération de P dans X induit un isomorphisme de $P^u \times Z$ sur $X_{Y,B}$.*

(iii) *Le sous-groupe dérivé de L opère trivialement dans $Y \cap Z$, qui est l'orbite fermée de L dans Z.*

De plus $X_{Y,B}$ est égal à $X \backslash \bar{\Delta}$, et P coïncide avec le stabilisateur de $X_{Y,B}$, ou encore de Y_B^0.

Démonstration. On aura besoin des deux lemmes suivants (le second est dû à Th. Vust).

LEMME 1 (généralisation de [BB], th. 1). *Soit V une variété complète dans laquelle opère un groupe réductif connexe Γ. Si toutes les orbites fermées de Γ dans V sont des points fixes, alors le groupe dérivé* (Γ, Γ) *opère trivialement dans V.*

Preuve du lemme 1. Par récurrence sur la dimension de V; on peut supposer V normale.

Si $\dim V = 1$ et Γ n'opère pas trivialement dans V, alors V est isomorphe à $\mathbb{P}^1$, et Γ opère comme sous-groupe de $PSL(2)$. La seule possibilité pour Γ est un tore maximal de $PSL(2)$; l'énoncé est vrai dans ce cas.

Si $\dim V > 1$, soit x un point fixe de Γ dans V. Choisissons un ouvert affine U de V, stable par Γ et contenant x. Posons $F = X \backslash U$; c'est un diviseur de V, stable par Γ. Par hypothèse de récurrence, (Γ, Γ) opère trivialement dans F. Soit x' un point fixe de Γ dans F, et U' un voisinage ouvert affine de x' dans V, stable par Γ. Notons $p\colon U' \to U'/\!/(\Gamma, \Gamma)$ le quotient. Puisque (Γ, Γ) opère trivialement dans le diviseur $F \cap U'$, les fibres générales de p sont de dimension au plus 1. Mais le groupe semi-simple (Γ, Γ) n'a pas d'orbite quasiaffine de dimension 1; par suite il opère trivialement dans V.

LEMME 2. *Soit $\mathcal{O}$ une orbite de B dans une G-variété. Soit Q un sous-groupe parabolique de G qui laisse stable $\mathcal{O}$. Soit M un sous-groupe de Levi de Q. Alors* (M, M) *a des points fixes dans $\mathcal{O}$.*

Preuve du lemme 2. Choisissons $x \in \mathcal{O}$. Puisque $Q \cdot x = B \cdot x$, on a: $Q = B \cdot Q_x$ où Q_x désigne le groupe d'isotropie de x. Pour tout $q \in Q$, notons $\tilde{q}$ son image dans Q/Q^u (où Q^u désigne le radical unipotent de Q). Alors $\tilde{Q} = \tilde{B} \cdot \tilde{Q}_x$ donc $\tilde{Q}/\tilde{Q}_x = \tilde{B}/\tilde{B} \cap \tilde{Q}_x$ est affine (car B est résoluble). Comme $\tilde{Q}$ est réductif, il en est de même de $\tilde{Q}_x$. Puisque $\tilde{B}$ est un sous-groupe de Borel de $\tilde{Q}$, le groupe dérivé de $\tilde{Q}$ est contenu dans $\tilde{Q}_x$ (voir [BLV] Lemme 3.4). Donc Q_x contient un conjugué de (M, M).

Démontrons maintenant le théorème. Soit $X \hookrightarrow \bar{X}$ n'importe quelle complétion équivariante (normale) de X [Su]. Choisissons une G-orbite fermée Y' dans l'adhérence $\bar{Y}$ de Y dans $\bar{X}$. D'après [BLV] théorème 1.4, il existe un sous-groupe parabolique Q de G, contenant B, un sous-groupe de Levi M de Q et une sous-variété Z' de $\bar{X}$ tels que

- Z' est affine, stable par M, et contient x.
- l'opération de Q sur X induit une immersion ouverte de $Q^u \times Z'$ dans X.
- $Z' \cap Y'$ est un point.

En particulier, Q est égal à G si et seulement si Y' est un point fixe de G.

Comme $Q^u \cdot Z'$ est un voisinage ouvert B-stable de $Y_B'^0$, on a: $Q^u \cdot Z' \supset \bar{X}_{Y',B} \supset X_{Y,B}$. Donc $X_{Y,B} = Q^u \cdot Z'_{Y \cap Z', B \cap M}$. On peut remplacer G, B, X, Y, par M, $B \cap M$, Z', l'orbite ouverte de M dans $Y \cap Z'$, et recommencer l'opération. On obtient ainsi un sous-groupe parabolique (noté encore Q pour simplifier) avec un sous-groupe de Levi M et une sous-variété Z' de X comme ci-dessus, telles que tout orbite fermée de M dans une complétion de $Y \cap Z'$ soit un point fixe. D'après le lemme 1, le groupe (M, M) opère trivialement dans $Y \cap Z'$. Il existe donc un ouvert affine Z de Z', stable par M, tel que $Y \cap Z$ soit l'unique orbite fermée de M dans Z. En fait, $Y \cap Z$ est l'unique orbite fermée de $B \cap M$ dans Z, donc $Q^u \cdot Z$ est inclus dans $X_{Y,B}$. D'autre part $Q^u \cdot Z$ est ouvert, stable par B, et contient Y_B^0; par suite il contient aussi $X_{Y,B}$. On conclut que l'application canonique de $Q^u \times Z$ dans $X_{Y,B}$ est un isomorphisme; de plus (M, M) opère trivialement dans $Y \cap Z$. Ainsi $X_{Y,B}$ est affine, donc son complémentaire dans X est un diviseur (stable par B). Il s'ensuit aussitôt que $X_{Y,B} = X \backslash \bar{\Delta}$.

Montrons maintenant que Q est égal à P. Remarquons d'abord que Q laisse stable $\bar{\Delta} = X \backslash X_{Y,B}$, donc aussi $\Delta = \bar{\Delta} \cap G \cdot x$; par suite Q est inclus dans P d'où $P^u \subset Q^u$. D'autre part, P laisse stable $X_{Y,B}$ donc aussi $X_{Y,B} \cap Y = Y_B^0$. D'après le lemme 2, le radical de P (noté rad P) opère transitivement dans Y_B^0. Mais on a vu que $Y_B^0 \simeq Q^u \times (Z \cap Y)$ et que (M, M) fixe $Z \cap Y$ point par point. Puisque $P^u \subset Q^u$, on a $P^u = Q^u$ d'où $P = Q$. On voit de même que P est le stabilisateur de Y_B^0.

Remarque. On montre de façon analogue le résultat suivant: soit X une G-variété normale (non nécessairement sphérique) contenant une G-orbite *sphérique* Y. Choisissons un point y de Y_B^0; notons P l'ensemble des $s \in G$ tels que $s \cdot Y_B^0 = Y_B^0$. Il existe un sous-groupe de Levi L de P, et une sous-variété Z de X tels que:

- Z est affine, stable par L, et contient y.
- L'opération de P sur X induit une immersion ouverte de $P^u \times Z$ dans X.
- $Z \cap Y$ est égal à $L \cdot y$, et le sous-groupe dérivé de L fixe y.

1.2. Soient U un groupe algébrique, V un sous-groupe fermé de U, et S une variété dans laquelle V opère régulièrement. On note $U *_V S$ le quotient de $U \times S$ par l'opération de V: $v \cdot (u, s) = (uv^{-1}, vs)$. L'opération de U dans lui-même par translations à gauche, passe au quotient en une opération de U dans $U *_V S$.

PROPOSITION. *Avec les notations du théorème, il existe un sous-groupe K de L, et une K-variété Z' sphérique affine avec un point fixe, tels que*

(i) *K contient le sous-groupe dérivé de L.*

(ii) *La L-variété Z est isomorphe à $L *_K Z'$.*

Démonstration. Le groupe L a une orbite ouverte dans la variété affine Z, et le sous-groupe dérivé de L opère trivialement dans l'orbite fermée de L dans Z. L'énoncé est donc un corollaire immédiat de [L2].

Corollaire 1. *Les singularités d'une G-variété sphérique, le long d'une orbite de G, sont rationnelles.*

Démonstration. D'après un résultat de H. Kraft (voir [Po] pour une démonstration) une variété sphérique affine n'a que des singularités rationnelles. Il suffit maintenant de remarquer que les singularités de X le long de Y sont équivalentes à la singularité de Z' au point fixe de K.

On va préciser le résultat du corollaire 1 dans un cas particulier, qui fait intervenir le *rang* de la G-variété sphérique X: il s'agit de la codimension minimale des orbites de B^u dans X, notée rg X (On verra plus loin d'autres interprétations du rang). Il est immédiat que le rang de Y est la dimension de L/K, et que $\mathrm{rg}\, X = \mathrm{rg}\, Y + \mathrm{rg}\, Z'$. Par suite $\mathrm{rg}\, Y < \mathrm{rg}\, X$ si $Y \neq X$.

Supposons que $\mathrm{rg}\, X = \mathrm{rg}\, Y + 1$. Soit y le point fixe de K dans Z'. Notons S le quotient de l'espace tangent (de Zariski) à X en y, par l'espace tangent à Y en y. Puisque le groupe K fixe y, il opère linéairement dans S.

Corollaire 2. *Le K-module S est simple, et la K-variété Z' est isomorphe au cône des vecteurs primitifs de S.*

Démonstration. On renvoie à [Kr] pour la définition et les propriétés du cône des vecteurs primitifs d'un module simple. Soient B' un sous-groupe de Borel de K, et U' le radical unipotent de B'. Puisque Z' est une K-variété affine sphérique de rang 1, l'algèbre $k[Z']^{U'}$ (des fonctions régulières sur Z', invariantes par U') est normale, sans multiplicité pour l'action du tore B'/U', et de dimension de Krull 1. Elle est donc engendrée librement par un vecteur propre t de B'/U'. Par suite, il existe un K-module simple M et une K-immersion fermée de Z' dans M, envoyant y sur l'origine de M. De plus t est la restriction à Z' d'un vecteur propre de B dans le dual M^*. D'après le lemme ci-dessous, Z' contient le cône C des vecteurs primitifs de M. Comme $k[C]^{U'}$ est aussi engendré par t, on a $Z' = C$. Enfin, le K-module M s'identifie à l'espace tangent $T_0 C$ en 0 à C, donc au quotient de $T_y Z$ par $T_y L/K$; d'après le théorème 1.1, il est isomorphe à $S = T_y X/T_y Y$.

Lemme. *Soit V une sous-variété fermée connexe du K-module simple M. Si V est stable par K et contient strictement* 0, *alors V contient les vecteurs primitifs de M.*

Preuve du lemme. Soit $\mathbb{P}(M \oplus k)$ l'espace projectif de $M \oplus k$ (où K opère trivialement sur k). Notons $\bar{V}$ l'adhérence de V dans $\mathbb{P}(M \oplus k)$: alors $\bar{V}$ rencontre l'hyperplan à l'infini $\mathbb{P}(M)$. Donc U' a au moins deux points fixes dans $\bar{V}$. Or l'ensemble des points fixes d'un groupe unipotent opérant dans une variété complète connexe, est lui-même connexe. Par suite, U' fixe des points de $V \setminus \{0\}$ i.e., V contient les vecteurs primitifs.

COROLLAIRE 3. *Soient X une G-variété sphérique, et y un point lisse de X. Il existe un voisinage ouvert de y dans X, isomorphe au produit direct d'un espace affine par un tore. La dimension de ce tore est le rang de l'orbite $G \cdot y$.*

Démonstration. Avec les notations de la proposition, on dispose d'une K-variété Z' avec un point fixe lisse, et une orbite ouverte de K. Donc Z' est isomorphe à un K-module (voir [L2]). Il s'ensuit que $Z \simeq L *_K Z'$ est un fibré vectoriel sur le tore L/K; or un tel fibré est trivial [Sw].

1.3 *Exemple: la variété des complexes.* Soient $E_1, \ldots, E_{r+1}$ des k-espaces vectoriels vectoriels de dimension finie. Soit X l'ensemble des $(u_1, \ldots, u_r)$ où chaque u_i est une application linéaire de E_i vers E_{i+1}, et où $u_{i+1} \circ u_i = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$. La variété algébrique affine X est la *variété des complexes* introduite par Buchsbaum et Eisenbud ([Ke]).

Le groupe $G = \Pi_{i=1}^{r+1} GL(E_i)$ opère sur X, avec pour orbites les $(u_1, \ldots, u_r)$ tels que le rang de chaque u_i soit égal à un entier fixé m_i. Toute suite $\underline{m} = (m_1, \ldots, m_r)$ d'entiers positifs tels que $m_i + m_{i+1} \leqslant \dim E_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$, est la suite des rangs d'une G-orbite $X^0(\underline{m})$, dont on note $X(\underline{m})$ l'adhérence dans X. A l'aide de [Ke] on vérifie sans peine que chaque $X(\underline{m})$ est sphérique de rang $|m| = \Sigma_{i=1}^{0} m_i$. Etudions la structure locale de $X(\underline{m})$.

Choisissons une base $(e_1^{(j)}, \ldots, e_{n_j}^{(j)})$ de E_j; on identifie éléments de G ou de X, et leurs matrices dans cette base. Soit B le sous-groupe de Borel de G, formé des matrices triangulaires supérieures. Notons y le r-uple de matrices $n_i \times n_{i+1}$

$$\begin{array}{r c}
 & \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{matrix} & 0 \end{array}\right) \\
m_i\left\{\vphantom{\begin{matrix}0\\ \\ 1\end{matrix}}\right. & \\
 & \underbrace{\hphantom{0 \; \iddots \; 1}}_{m_i}\hphantom{\;|\;0}
\end{array}$$

Alors $y \in X^0(\underline{m})$; on vérifie que $B \cdot y$ est ouvert dans $X^0(\underline{m})$, et que le sous-groupe parabolique associé P est le produit des

$$P_i = \left\{ \begin{array}{r c}
 & \overbrace{\hphantom{**}}^{m_i} \hphantom{|*|} \overbrace{\hphantom{**}}^{m_{i-1}} \\
\begin{array}{r} m_i\left\{\vphantom{\begin{matrix}*\\ \ddots\\ 0\end{matrix}}\right. \\ \\ m_{i-1}\left\{\vphantom{\begin{matrix}*\\ \ddots\\ 0\end{matrix}}\right. \end{array} &
\left(\begin{array}{c|c|c}
\begin{matrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{matrix} & * & * \\ \hline
0 & * & * \\ \hline
0 & 0 & \begin{matrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{matrix}
\end{array}\right)
\end{array} \right\}$$

(On convient que $m_0 = m_{r+1} = 0$.) De plus, on peut prendre pour L le sous-groupe de Levi "standard" de P, et pour Z l'ensemble des r-uples de matrices

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} \overbrace{\qquad\quad}^{m_i} & \qquad & \overbrace{\quad}^{m_{i-1}} \end{array} \\
\begin{array}{c} m_{i+1}\left\{\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\end{array}}\right. \\ m_i\left\{\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\end{array}}\right. \end{array} &
\left(\begin{array}{c|c|c}
0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & A_i & 0 \\
\hline
\begin{matrix} 0 & & \lambda_i^{(m_i)} \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \lambda_i^{(1)} & & 0 \end{matrix} & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array}$$

où aucun $\lambda_i^{(j)}$ n'est nul, et $A_2A_1 = \cdots = A_rA_{r-1} = 0$. Par suite, si $X(\underline{m}')$ contient $X(\underline{m})$, alors $X(\underline{m}')_{X^0(\underline{m}),B}$ est le produit d'une variété lisse et de la variété des complexes

$$0 \to F_1 \xrightarrow{v_1} F_2 \xrightarrow{v_2} \cdots \to F_{r+1} \to 0$$

où $\dim F_i = n_i - m_i - m_{i-1}$, et $\operatorname{rg} v_i \leqslant m_i' - m_i$.

Les singularités de $X(\underline{m}')$ le long de $X^0(\underline{m})$ sont donc équivalentes à la singularité en 0 de la variété des complexes ci-dessus. Considérons en particulier les adhérences d'orbites maximales dans $X(\underline{m}')$: ce sont les $X(\underline{m})$ avec $m_i = m_i'$ sauf pour un indice j tel que $m_j = m_j' - 1$. Le long d'un tel $X(\underline{m})$, les singularités de $X(\underline{m}')$ sont équivalentes à la singularité en 0 des matrices $(n_j - m_j - m_{j-1}, n_{j+1} - m_{j+1} - m_j)$ de rang au plus 1. (Cela peut aussi de déduire du corollaire 2). On décrit ainsi les "dégénérescences minimales" des orbites.

Plus généralement, Abeasis, Del Fra et Kraft ont étudié les orbites de G dans $\Pi_{i=1}^r \operatorname{Hom}(E_i, E_{i+1})$ (voir [ADK]). Leurs adhérences sont normales, à singularités rationnelles. Les dégénerescences minimales d'une orbite sont *analytiquement* équivalentes à la singularité en 0 de matrices de rang au plus un. Dans le cas (très particulier) des variétés de complexes, les méthodes de 1.1 et 1.2 aboutissent à des résultats plus précis.

2. Le groupe de Picard des variétés sphériques simples

2.1. Pour toute variété algébrique Z, on note $\operatorname{Pic}(Z)$ le groupe de Picard de Z, c'est-à-dire le groupe des classes d'isomorphisme des fibrés en droites localement triviaux sur Z. Si de plus le groupe algébrique A opère régulièrement dans Z, on dispose aussi du groupe $\operatorname{Pic}^A(Z)$ des classes des fibrés en droites A-linéarisés sur Z (voir [MF] 1.3). Lorsque Z est normale, et A est affine factoriel, l'application naturelle de $\operatorname{Pic}^A(Z)$ dans $\operatorname{Pic}(Z)$ est surjective ([K...,] p. 22). Deux linéarisations du même fibré diffèrent par un caractère de A.

On va déterminer le groupe de Picard d'une G-variété sphérique simple, le groupe G étant toujours réductif connexe. Il n'est pas restrictif de supposer que G est produit direct d'un tore par un groupe semi-simple simplement connexe; alors G est factoriel. Tout sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique de G est également factoriel.

On conserve les notations de la première partie; en particulier, X désigne une G-variété sphérique simple, et Y sa G-orbite fermée.

PROPOSITION. *Le groupe de Picard de $X_{Y,B}$ est trivial.*

Démonstration. Grâce au théorème 1.1, il suffit de prouver que $\mathrm{Pic}(Z) = 0$ où Z est une L-variété sphérique affine dont l'orbite fermée est factorielle. Le résultat est donc un cas particulier du lemme suivant:

LEMME. *Soit Z une variété affine normale où le groupe réductif L opère avec une unique orbite fermée Z'. La restriction de $\mathrm{Pic}^L(Z')$ à $\mathrm{Pic}^L(Z')$ est alors injective.*

Preuve du lemme (voir aussi [BH] Corollary 6.4). Notons $k[Z]$ l'algèbre des fonctions régulières sur Z, et $k(Z)$ son corps des fractions. Soit I un $k[Z]$-sous-module inversible de $k(Z)$, stable par L; on suppose que $I \otimes_{k[Z]} k[Z']$ est trivial dans $\mathrm{Pic}^L(Z')$. Soit f' un générateur de $I \otimes_{k[Z]} k[Z']$; c'est un vecteur propre de L. Puisque L est réductif, et I est un L-module rationnel, on peut trouver un vecteur propre f de L dans I tel que f relève $f' \cdot$ L' ensemble des $x \in Z$ tels que f engendre I en x, est un ouvert stable par G, et contient Z'; il est donc égal à Z. Cela signifie que f engendre I.

2.2. Considérons $\mathrm{Pic}(X)$ comme le groupe des classes de diviseurs de Cartier modulo équivalence linéaire; il suit de la proposition 2.1 que $\mathrm{Pic}(X)$ est engendré par les classes de diviseurs à support dans $X \backslash X_{Y,B}$, c'est-à-dire dans $\bar{\Delta}$. Pour décrire ceux-ci, on aura besoin de notations de [BP]; rappelons-les brièvement.

Notons ${}^B\mathscr{D}(G/H) = \mathscr{D}$ l'ensemble des diviseurs irréductibles, stables par B, de G/H. Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des vecteurs propres f de B (opérant à gauche) et de H (opérant à droite) dans le corps $k(G)$ des fonctions rationnelles sur G, telles que $f(1) = 1$. Soit $\mathscr{P}_+$ (resp. $\mathscr{P}^H$) le sous-ensemble de $\mathscr{P}$ formé des fonctions régulières sur G (resp. invariantes par H). Tout $D \in \mathscr{D}$ détermine une valuation discrète normalisée, invariante par B, du corps $k(G/H)$; on la note v_D. Soit $\mathscr{V}(G/H) = \mathscr{V}$ l'ensemble des valuations discrètes normalisées, invariantes par G, de $k(G/H)$. Au plongement simple X sont associés l'ensemble $\mathscr{D}_X$ de ses *couleurs* (c'est-à-dire des $D \in \mathscr{D}$ tels que $\bar{D}$ contient Y) et l'ensemble $\mathscr{V}_X$ des valuations provenant des orbites de codimension 1 de G dans X. Toutes ces valuations se restreignent en des formes linéaires sur le groupe abélien libre $\mathscr{P}^H \subset k(G/H)^*$. On note $C(\mathscr{D}_X, \mathscr{V}_X)$ le cône convexe engendré par ces formes dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $V = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathscr{P}^H, \mathbb{Q})$. Enfin, on note $(\mathscr{D}_X, \mathscr{V}_X)^\perp$ l'ensemble des $f \in \mathscr{P}^H$ qui sont annulées par $\mathscr{D}_X$ et $\mathscr{V}_X$.

L'application qui à une fonction rationnelle f associe son diviseur $\mathrm{div}(f)$, induit une suite exacte

$$0 \to X^*(G) \to \mathscr{P} \xrightarrow{\mathrm{div}} \mathbb{Z}\mathscr{D} \to 0$$

où $X^*(G)$ est le groupe des caractères de G, et $\mathbb{Z}\mathscr{D}$ est le groupe abélien libre sur $\mathscr{D}$. Remarquons que pour tout $f \in (\mathscr{D}_X, \mathscr{V}_X)^\perp$, on a: $\mathrm{div}(f) \in \mathbb{Z}(\mathscr{D} \backslash \mathscr{D}_X)$, et que ce dernier est le groupe abélien libre sur les composantes irréductibles de $\mathscr{D} \backslash \mathscr{D}_X$.

PROPOSITION. *Toute composante irréductible de $\bar{\Delta}$ est un diviseur de Cartier; le groupe de Picard de X est le quotient de $\mathbb{Z}(\mathscr{D} \backslash \mathscr{D}_X)$ par le sous-groupe formé des* $\mathrm{div}(f)$, $f \in (\mathscr{D}_X, \mathscr{V}_X)^\perp$.

Démonstration. Soit $D \in \mathscr{D} \backslash \mathscr{D}_X$. L'image réciproque de D par l'application canonique $p: G \to G/H$ est un diviseur irréductible de G, stable à gauche par B et à droite par H. La variété G étant supposée factorielle, on peut choisir dans $\mathscr{P}$ une équation f_D de ce diviseur. Il existe un G-module simple M_D, avec un vecteur propre m_D de H dans M_D, et un vecteur propre μ_D de B dans M_D^*, tels que $f_D(s) = \mu_D(s \cdot m_D)$ pour tout $s \in G$ ([BLV] 2.2). Notons x_D l'image de m_D dans l'espace projectif $\mathbb{P}(M_D)$, et H_D le groupe d'isotropie de x_D dans G. La variété $X_D = \overline{G \cdot x_D}$ est sphérique (car H_D contient H), projective, et simple (car M_D est simple). De plus le diviseur D est l'image réciproque de la section hyperplane $\mathbb{P}(\mu_D^\perp)$ de X_D, par l'application naturelle $\varphi: G/H \to X_D$. Montrons que φ se prolonge à X, ce qui impliquera que $\bar{D}$ est de Cartier. D'après [LV] 6.3, il suffit de vérifier que pour toute couleur D' de X telle que $\varphi(D') \neq G/H_D$, l'image $\varphi(D')$ est une couleur de X_D. Mais on voit facilement que toute composante irréductible de $(G/H_D) \backslash B \cdot x_D$, distincte de $\varphi(D)$, est une couleur de X_D. Par hypothèse, D n'est pas couleur de X, ce qui permet de conclure.

Ainsi $\operatorname{Pic}(X)$ est engendré par $\mathscr{D} \backslash \mathscr{D}_X$. Soit $f \in k(G/H)$ telle que $\operatorname{div}(f)$ soit à support dans $\mathscr{D} \backslash \mathscr{D}_X$: alors $\operatorname{div}(f)$ est stable par B, donc $f \in \mathscr{P}^H$. Par suite $\operatorname{div}(f) = \Sigma_{D \in \mathscr{D}_X} v_D(f)\bar{D} + \Sigma_{v \in \mathscr{V}_X} v(f)\overline{X'_v}$ où X'_v désigne la G-orbite de codimension 1 dans X, associée à la valuation $v \in \mathscr{V}_X$. Donc pour que $\operatorname{div}(f)$ appartienne à $\mathbb{Z}(\mathscr{D} \backslash \mathscr{D}_X)$, il faut et il suffit que $f \in (\mathscr{D}_X, \mathscr{V}_X)^\perp$.

Remarques. (i) Supposons que H est d'indice fini dans son normalisateur. L'espace homogène G/H admet alors un unique plongement complet, simple, sans couleur X; on l'appelle le *plongement magnifique* de G/H (voir [BP] 5.3 Corollaire). Pour celui-ci, on a $\mathscr{D}_X = \varnothing$ et $C(\mathscr{D}_X, \mathscr{V}_X) = CV(G/H)$ (le cône convexe engendré par $\mathscr{V}$). Puisque $CV(G/H)$ engendre l'espace vectoriel V, le groupe $(\mathscr{D}_X, \mathscr{V}_X)^\perp$ est trivial. Par suite *le groupe de Picard de X est le groupe abélien libre sur $\mathscr{D}$.*

Le plongement magnifique d'un espace *symétrique* G/H est sa "compactification canonique" mentionnée dans l'introduction. DeConcini et Procesi ont déterminé son groupe de Picard, par des méthodes très différentes des nôtres ([DP I] §7). Renvoyons à [V] pour l'étude des plongements des espaces symétriques, et en particulier pour la description de $\mathscr{D}$.

Plus généralement, si X est une variété sphérique simple dont l'orbite fermée est projective, alors le groupe de Picard de X est engendré librement par $\mathscr{D} \backslash \mathscr{D}_X$.

(ii) Le groupe $Cl(X)$ des classes de diviseurs de X est engendré par $\mathscr{D} \cup \mathscr{V}_X$, avec pour relations les $\operatorname{div}(f)$, $f \in \mathscr{P}^H$. En effet, X contient l'ouvert affine factoriel $B \cdot x$, dont le complémentaire a pour composantes irréductibles les éléments de $\mathscr{D} \cup \mathscr{V}_X$, i.e. les diviseurs irréductibles et stables par B de X.

On en déduit sans mal que $Cl(X)/\operatorname{Pic}(X)$ est un groupe fini si et seulement si les valuations de $\mathscr{D}_X$ et $\mathscr{V}_X$ se restreignent en des éléments linéairement indépendants de V. De même, tout diviseur de X est localement principal si et seulement si $\mathscr{D}_X$, $\mathscr{V}_X$ forment une base du groupe abélien libre $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathscr{P}^H, \mathbb{Z})$. On obtient ainsi une condition nécessaire pour la lissité d'une variété sphérique. Cette condition n'est pas suffisante: en effet le cône sur une grassmanienne est une variété sphérique factorielle singulière.

2.3. *Exemples.* Dans [S1] §13, Schubert considère quatre conditions portant sur un couple de points de l'espace projectif $\mathbb{P}^3$:
ε = les deux points "sont infiniment proches, mais la droite qui les joint est uniquement déterminée".
p = le premier point est dans un plan donné.
q = le second point est dans un plan donné.
g = la droite joignant les deux points rencontre une droite donnée.
Une relation importante dans le "calcul de Schubert" est la suivante: $\varepsilon = p + q - g$. Voyons comment cette relation découle naturellement de la théorie précédente.

Soit $Gr_{3,1}$ la grassmanienne des droites de l'espace projectif $\mathbb{P}^3$. Considérons la sous-variété X de $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \times Gr_{3,1}$ formée des triplets (a, b, d) tels que la droite d passe par les points a et b. On peut aussi voir X comme l'éclatement de la diagonale dans $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$. Le groupe $G = SL(4, k)$ opère dans X avec une orbite ouverte, dont un groupe d'isotropie est

$$H = \left\{\text{matrices de déterminant 1, de la forme } \begin{pmatrix} * & 0 & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}\right\}$$

et une orbite fermée de codimension 1. L'espace homogène G/H est sphérique; H est d'indice 2 dans son normalisateur, et X est le plongement magnifique de G/H.

Le monoïde $\mathscr{P}_+$ est engendré librement par trois éléments p, q, g, dont les poids par rapport à B sont $\omega_3, \omega_3, \omega_2$ (on note $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ les poids fondamentaux de G). Par suite $\mathscr{D}$ est formé de trois diviseurs notés encore p, q, g. Leurs adhérences dans X sont les images réciproques des sections hyperplanes de $\mathbb{P}^3$, $\mathbb{P}^3$, $Gr_{3,1}$, par les projections correspondantes (cela rappelle la preuve de la proposition 2.2).

On vérifie sans peine que la fonction $f = g/pq$ engendre le groupe $\mathscr{P}^H$, et que $v(f) = 1$ où v est l'unique élément de $\mathscr{V} = \mathscr{V}_X$. Ecrivons que $\operatorname{div}(f) = 0$ dans le groupe de Picard de X. Puisque f est vecteur propre de B, le diviseur $\operatorname{div}(f)$ est à support dans $\mathscr{D} \cup \mathscr{V}_X = \{p, q, g, \varepsilon\}$ où ε désigne l'orbite fermée de G dans X. On a:

$$0 = \operatorname{div}(f) = v_p(f)p + v_q(f)q + v_g(f)g + v(f)\varepsilon = -p - q + g + \varepsilon$$

ce qui n'est autre que la relation de Schubert.

2.4. Déterminons maintenant les sections d'un diviseur de Cartier d sur X. On a déjà rappelé que le fibré en droites associé à d admet des G-linéarisations, et que deux quelconques d'entre elles diffèrent par un caractère de G. Par suite le groupe G opère rationnellement dans l'espace $H^0(X, d)$ des sections de d; une telle opération est unique, à multiplication près par un caractère de G.

D'après 2.2, on peut supposer que d est stable par B. Il lui est associé un élément f_d de $\mathscr{P}_+$, unique à multiplication près par un caractère de G (voir 2.2). Définissons le poids $\pi(d)$ comme le caractère de f_d en tant que vecteur propre de B; il se trouve dans le quotient par $X^*(G)$ du monoïde des poids dominants de G, ou encore dans les poids dominants du groupe dérivé (G, G) de G. Définissons de même le poids $\pi(f)$ de tout $f \in \mathscr{P}^H$. Notons ${}^{(B)}H^0(X, d)$ l'ensemble des vecteurs propres de B dans le G-module rationnel $H^0(X, d)$.

PROPOSITION. *Soit* $d = \Sigma_{D \in \mathscr{D} \backslash \mathscr{D}_X} n_D D$ *un diviseur de Cartier de* X, *stable par* B.

(i) ${}^{(B)}H^0(X, d)$ *est l'ensemble des multiples des* $f \in \mathscr{P}^H$ *telles que* $v(f) \geqslant 0$ *pour tout* $v \in \mathscr{V}_X \cup \mathscr{D}_X$, *et que* $v_D(f) + n_D \geqslant 0$ *pour tout* $D \in \mathscr{D} \backslash \mathscr{D}_X$.

(ii) *Le* (G, G)-*module* $H^0(X, d)$ *est somme directe, avec multiplicité* 1, *des* (G, G)-*modules simples de poids* $\pi(d) + \pi(f)$, $f \in {}^{(B)}H^0(X, d)$.

Démonstration. Une section non nulle de d est une fonction rationnelle f sur X, telle que le diviseur $d + \operatorname{div}(f)$ soit effectif. Si de plus cette section est vecteur propre de B, alors

$$\operatorname{div}(f) = \sum_{D \in \mathscr{D}} v_D(f)\bar{D} + \sum_{v \in \mathscr{V}_X} v(f)\bar{X}'_v,$$

avec les notations de la preuve de la proposition 2.2. L'assertion (i) s'en déduit aussitôt.

La restriction de X à G/H induit un G-morphisme injectif de $H^0(X, d)$ vers $H^0(G/H, d)$. Soit χ le poids de f_d par rapport à H; alors $H^0(G/H, d)$ est l'ensemble des $\varphi \in k[G]$ tels que $\varphi(gh) = \chi(h)\varphi(g)$ pour tous $h \in H$ et $g \in G$. L'image de ${}^{(B)}H^0(X, d)$ dans $H^0(G/H, d)$ est formée des produits $f \cdot f_d$ où f est comme en (i); d'où l'assertion (ii).

2.5. *Exemples.* Considérons l'espace homogène G/H introduit en 2.4; c'est l'ensemble des couples de points distincts de $\mathbb{P}^3$. Cette fois-ci, plongeons-le dans $X = \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$. Avec les notations de 2.3, le groupe de Picard de X est engendré librement par les diviseurs p et q; l'unique couleur est g. Soit $d = mp + nq$ où m, n sont des entiers positifs. On a $\pi(d) = (m + n)\omega_3$ et $\pi(f) = \omega_2 - 2\omega_3$. On déduit immédiatement de la proposition 2.4 que ${}^{(B)}H^0(X, d)$ est l'ensemble des multiples des f^t pour $0 \leqslant t \leqslant \min(m, n)$. De plus $H^0(X, d)$ est isomorphe à la somme directe des G-modules simples M_λ de plus grand poids $\lambda = (m + n - 2t)\omega_3 + t\omega_2$, pour $0 \leqslant t \leqslant \min(m, n)$. D'autre part, le G-module $H^0(X, d) = H^0(\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3, mp + nq)$ est isomorphe à $(S^m k^4 \otimes S^n k^4)^*$, où $S^m k^4$ désigne la puissance symétrique m-ième de k^4. On obtient ainsi une "formule de Clebsch-Gordan"

$$M_{m\omega_1} \otimes M_{n\omega_1} = S^m k^4 \otimes S^n k^4 \simeq \bigoplus_{0 \leqslant t \leqslant \min(m,n)} M_{(m+n-2t)\omega_1 + t\omega_2}$$

qui se généralise aussitôt à un espace vectoriel k^n, $n \geqslant 2$.

Cette méthode permet également de retrouver la "formule de Pieri" qui décompose le produit tensoriel $S^m E \otimes M$ (où E est un k-espace vectoriel de dimension finie, et M un $SL(E)$-module simple) en somme directe de $SL(E)$-modules simples. Voici une esquisse de démonstration géométrique de cette formule. Notons $\mathscr{B}(E)$ la variété des drapeaux de E, et considérons l'action de $G = SL(E)$ sur $X = \mathbb{P}(E^*) \times \mathscr{B}(E)$. Choisissons une base $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ de E, et notons $(e_1^*, \ldots, e_{n+1}^*)$ la base duale. Soit B_0 (resp. P_0) le stabilisateur dans G du drapeau standard d_0 (resp. de la droite ke_1^* de E^*). Le groupe G a une orbite ouverte dans X, dont un groupe d'isotropie est

$$H = B_0 \cap P_0 = \left\{\text{matrices de déterminant 1, de la forme } \begin{pmatrix} * & 0 \ldots 0 \\ 0 & \begin{array}{c} \diagdown\, * \\ \diagdown \end{array} \end{pmatrix}\right\}.$$

Le complémentaire de cette orbite est le diviseur irréductible de X formé des couples (h, d) tels que l'hyperplan h contienne la droite du drapeau d. L'espace homogène G/H est sphérique; avec les notations de [BP] 4.1, ses couleurs sont:

$$\delta_1 = [\omega_n, \chi_1], \delta_2 = [\omega_{n-1}, \chi_2], \ldots, \delta_n = [\omega_1, \chi_n],$$

$$\varepsilon_1 = [\omega_n, \chi_2 - \chi_1], \varepsilon_2 = [\omega_{n-1}, \chi_3 - \chi_2], \ldots, \varepsilon_{n-1} = [\omega_2, \chi_n - \chi_1],$$

$$\varepsilon_n = [\omega_1, -\chi_1]$$

où χ_i désigne la restriction à H du i-ième caractère fondamental de B_0.

Il n'y a qu'une orbite fermée de G dans X, formée des couples (h, d) tels que h soit l'hyperplan du drapeau d. L'ensemble $\mathscr{D}_X$ des couleurs de X est formé de $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$. Le groupe de Picard de X est engendré librement par $\delta_1, \ldots, \delta_n, \varepsilon_n$; on remarque que ε_n (resp. $\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$) provient de la base habituelle du groupe de Picard de $\mathbb{P}(E^*)$ (resp. $\mathscr{B}(E)$). Une base de $\mathscr{P}^H$ est formée des fonctions $f_1 = \delta_1 + \varepsilon_n$; $f_2 = \delta_2 - \varepsilon_1 + \varepsilon_n; \ldots; f_n = \delta_n - \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$. On a $\mathscr{V}_X = \{v\}$ où $v(f_1) = -1$ et $v(f_i) = 0$ pour $2 \leqslant i \leqslant n$; en effet le diviseur $X \backslash (G/H)$ est égal à $\delta_1 + \varepsilon_n$.

Soit $d = \Sigma_{i=1}^n a_i \delta_i + b\varepsilon_n$ un élément de $\mathrm{Pic}(X)$, les entiers a_i et b étant non négatifs. Alors ${}^{(B)}H^0(X, d)$ est l'ensemble des multiples non nuls des $f = f_1^{-x_1} \ldots f_n^{-x_n}$, avec $v(f) \geqslant 0$; $v_{\varepsilon_i}(f) \geqslant 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$; $v_{\delta_j}(f) + a_j \geqslant 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$, et $v_{\varepsilon_n}(f) + b \geqslant 0$. Cela signifie que $x_1 \geqslant 0$; $x_i \geqslant 0$ pour $2 \leqslant i \leqslant n$; $a_j - x_j \geqslant 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$, et $b - x_1 - \cdots - x_n \geqslant 0$. Par suite $H^0(X, d)$ est la somme directe des G-modules simples de plus grand poids

$$\sum_{i=1}^n a_i \omega_{n+1-i} + b\omega_1 - x_1(\omega_n + \omega_1) - x_2(\omega_{n-1} - \omega_n + \omega_1) - \cdots - x_n(2\omega_1 - \omega_2).$$

pour $0 \leqslant x_1 \leqslant a_1, \ldots, 0 \leqslant x_n \leqslant a_n, x_1 + \cdots + x_n \leqslant b$.

D'autre part $H^0(X, d) = H^0(\mathbb{P}(E^*) \times \mathscr{B}(E), b\varepsilon_n + \Sigma_{i=1}^n a_i \delta_i)$ est isomorphe à $M_{b\omega_1} \otimes M_{a_1\omega_n + \cdots + a_n\omega_1}$. On obtient ainsi la décomposition

$$M_{m\omega_1} \otimes M_{a_1\omega_1 + \cdots + a_n\omega_n} = \bigoplus M_{a_1\omega_1 + \cdots + a_n\omega_n + m\omega_1 - x_1(2\omega_1 - \omega_2) - x_2(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) - \cdots - x_n(\omega_1 + \omega_n)}$$

où la somme porte sur tous les $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $0 \leqslant x_i \leqslant a_i$ et $\Sigma_{i=1}^n x_i \leqslant m$. Cette formule s'énonce plus agréablement en termes de partitions ([Mac] 5.16).

2.6. Revenons au cas d'une variété sphérique simple quelconque. Rappelons qu'un diviseur d est dit engendré par ses sections s'il existe un morphisme de X vers un espace projectif $\mathbb{P}(E)$ tel que d soit linéairement équivalent à l'image réciproque de la section hyperplane de $\mathbb{P}(E)$.

PROPOSITION. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:
(i) *d est engendré par ses sections.*
(ii) *d est linéairement équivalent à $\Sigma_{D \in \mathscr{D}\backslash\mathscr{D}_X} n_D D$, où tous les n_D sont positifs ou nuls.*

Démonstration. D'après 2.2, on peut supposer que le support de d est contenu dans $\bar{\Delta}$. Puisque le diviseur d est associé à un fibré en droites G-linéarisable, et que $G \cdot X_{Y,B} = X$, la condition (i) équivaut à: la restriction de d à $X_{Y,B}$ est engendrée par les sections globales de d. Comme $X_{Y,B}$ est affine, cela revient à dire que la restriction de ${}^{(B)}H^0(X, d)$ à $X_{Y,B}$ contient une fonction inversible. Or l'ensemble des vecteurs propres de B dans $k[X_{Y,B}]$ est $\{f \in \mathscr{P}^H | \forall v \in \mathscr{V}_X \cup \mathscr{D}_X, v(f) \geqslant 0\}$. Le groupe des éléments inversibles de $k[X_{Y,B}]$ est donc engendré par k^* et $\{f \in \mathscr{P}^H | \forall v \in \mathscr{V}_X \cup \mathscr{D}_X, v(f) = 0\} = (\mathscr{D}_X, \mathscr{V}_X)^\perp$. D'autre part, la restriction à $X_{Y,B}$ des fonctions de ${}^{(B)}H^0(X, d)$ est formée des $f \in {}^{(B)}k[X_{Y,B}]$ telles que $v_D(f) + n_D \geqslant 0$ pour tout $D \in \mathscr{D}\backslash\mathscr{D}_X$. Par suite:
d est engendré par ses sections
$\Leftrightarrow$ il existe $f \in (\mathscr{D}_X, \mathscr{V}_X)^\perp$ tel que $v_D(f) + n_D \geqslant 0$ $\forall D \in \mathscr{D}\backslash\mathscr{D}_X$
$\Leftrightarrow$ d est linéairement équivalent à $\Sigma_{D \in \mathscr{D}\backslash\mathscr{D}_X} m_D D$ où tous les m_D sont positifs ou nuls.

Pour tout diviseur $d = \Sigma\, n_D D$, notons $\mathscr{C}(X, d)$ l'ensemble des $f \in \mathscr{P}^H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ telles que $v(f) \geqslant 0$ pour tout $v \in \mathscr{V}_X \cup \mathscr{D}_X$, et que $v_D(f) + n_D \geqslant 0$ pour tout $D \in \mathscr{D}\backslash\mathscr{D}_X$. C'est un polytope convexe dans l'espace $V^* = \mathscr{P}^H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$; son intersection avec le réseau $\mathscr{P}^H$ détermine les sections de d. La proposition précédente peut se reformuler ainsi: *d est engendré par ses sections si et seulement si $\mathscr{C}(X, d)$ contient l'origine.* Remarquons que $\mathscr{C}(X, d)$ est toujours contenu dans le cône dual de $C(\mathscr{D}_X, \mathscr{V}_X)$.

THÉORÈME. *Soit d un diviseur de Cartier. Les conditions suivantes sont équivalentes*:
(i) *d est ample.*
(ii) *d est linéairement équivalent à $\Sigma_{D \in \mathscr{D}\backslash\mathscr{D}_X} n_D D$, où chaque n_D est strictement positif.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii). Le diviseur $-\Sigma_{D \in \mathscr{D}\backslash\mathscr{D}_X} D + pd$ est engendré par ses sections pour tout p assez grand. On peut supposer que $d = \Sigma_{D \in \mathscr{D}\backslash\mathscr{D}_X} n_D D$; alors $-\Sigma_{D \in \mathscr{D}\backslash\mathscr{D}_X} D + pd = \Sigma_{D \in \mathscr{D}\backslash\mathscr{D}_X} (pn_D - 1)D$ et on conclut grâce à la proposition *ci-dessus.*

(ii) $\Rightarrow$ (i). On dispose d'une section $s \in {}^{(B)}H^0(X, d)$, représentée par le point 0 de $\mathscr{C}(X, d)$, et dont l'ensemble des zéros est $\bar{\Delta}$. Soit $\varphi: X \to \mathbb{P}(H^0(X, d)^*)$ le G-morphisme associé à d. Alors $\varphi(X)\backslash\mathbb{P}(s^\perp) = V$ est une variété affine, ayant pour algèbre des fonctions régulières $\bigcup_{n=0}^{\infty} s^{-n}H^0(X, nd)$. Le groupe P (défini en 1.2) laisse stable V; de plus, φ envoie $X_{Y,B}$ dans V, et P^u opère librement dans V ([BLV] proposition 1.2). L'ensemble des vecteurs propres de B dans $k[X_{Y,B}]$ (resp. $k[V]$) est $\{f \in \mathscr{P}^H | \forall v \in C(\mathscr{D}_X, \mathscr{V}_X)\ v(f) \geqslant 0\}$ (resp. $\{f \in \mathscr{P}^H | nf \in \mathscr{C}(X, d)$ pour au moins un entier $n \geqslant 0\}$). On voit sans peine que $\mathscr{C}(X, d)$ engendre le cône dual de $C(\mathscr{D}_X, \mathscr{V}_X)$. On en déduit que quitte à remplacer d par un de ses multiples, B a les mêmes vecteurs propres dans $k[X_{Y,B}]$ et $k[V]$. D'après 1.2, il s'ensuit que la restriction de φ à $X_{Y,B}$ est un isomorphisme sur V. On conclut grâce au fait que φ est un G-morphisme, et que les $g \cdot X_{Y,B}$ $(g \in G)$ forment un recouvrement affine de X.

2.7. *Exemples: les coniques complètes.*

(a) *Coniques dans le plan projectif.*

Les coniques non singulières dans $\mathbb{P}^2$ forment l'espace homogène symétrique G/H où H est le normalisateur de $SO(3)$ dans $SL(3) = G$. L'ensemble $\mathscr{D}$ est formé de deux éléments λ et μ, de poids respectifs $2\omega_1$ et $2\omega_2$. On peut les voir comme les conditions pour une conique de passer par le point fixe de B dans $\mathbb{P}^2$ (resp. $\check{\mathbb{P}}^2$). Soient f_λ, f_μ les générateurs de $\mathscr{P}_+$ associés à λ et μ. Une base de $\mathscr{P}^H$ est formée de $f_\lambda^2 f_\mu^{-1}$ et $f_\mu^2 f_\lambda^{-1}$, qui engendrent le cône dual de $CV(G/H)$.

Considérons le plongement magnifique X de G/H; c'est l'espace des coniques complètes. Le groupe de Picard de X est engendré librement par λ et μ. Les diviseurs amples sur X sont les $m\lambda + n\mu$ avec $m, n > 0$. Le poids de $d = m\lambda + n\mu$ est égal à $2(m\omega_1 + n\omega_2)$. On voit sans mal que le polyèdre $\pi(d) + \mathscr{C}(X, d)$ a pour sommets 0, $(2m + n)\omega_1$, $(m + 2n)\omega_2$, $2(m\omega_1 + n\omega_2)$, d'où la détermination des sections de d grâce à 2.4.

A l'aide de [V], on peut généraliser cette description à tous les espaces symétriques, et retrouver les résultats de [DP I] §7 et 8.

(b) *Coniques dans l'espace projectif* $\mathbb{P}^l$, $l \geqslant 3$.

Cette fois, on a affaire à l'espace homogène G/H où $G = SL(l + 1)$ et où H est le sous-groupe de G formé des matrices

$$3\{\ \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline \underbrace{0}_{3} & * \end{array}\right) \quad \text{avec } A \text{ une similitude orthogonale.}$$

L'ensemble $\mathscr{D}$ est formé de trois diviseurs que Schubert désigne par μ, ν, ρ ([Sc1] §20). Les duaux de leurs poids sont respectivement ω_3, $2\omega_2$, $2\omega_1$. Ils représentent les conditions suivantes pour une conique:

- son plan rencontre un $\mathbb{P}^{l-3}$.
- elle coupe un $\mathbb{P}^{l-2}$.
- elle est tangente à un $\mathbb{P}^{l-1}$.

(On note $\mathbb{P}^m$ un sous-espace linéaire de dimension m dans $\mathbb{P}^l$). Soient f_μ, f_ν, f_ρ les générateurs de $\mathscr{P}_+$. Une base de $\mathscr{P}^H$ est formée de $f_\rho^2 f_\nu^{-1}$ et $f_\nu^2 f_\rho^{-1} f_\mu^{-2}$, qui engendrent le cône dual de $CV(G/H)$.

Le plongement magnifique X de G/H est un fibré ayant pour base la grassmanienne des plans de $\mathbb{P}^l$, et pour fibre les coniques complètes dans $\mathbb{P}^2$. Son groupe de Picard est engendré librement par μ, ν, ρ. Dans X se trouvent deux diviseurs stables par G, notés δ et η par Schubert (δ est formé des coniques dégénérées en deux droites, et η des coniques dont la duale dégénère en deux droites). En écrivant que $\operatorname{div}(f_\rho^2 f_\nu^{-1}) = 0 = \operatorname{div}(f_\nu^2 f_\rho^{-1} f_\mu^{-2})$, on obtient les relations $2\rho - \nu = \delta$ et $2\nu - \rho - 2\mu = \eta$ ([Sc1] §20). Soit $d = m\mu + n\nu + r\rho$ un diviseur ample. Les poids des sommets de $\pi(d) + \mathscr{C}(X, d)$ sont les duaux de $((2r + 4n + 3m)/3)\omega_3$; $(2r + n)\omega_1 + (n + m)\omega_3$; $2r\omega_1 + 2n\omega_2 + m\omega_3$; $(r + 2n)\omega_2 + m\omega_3$.

3. Le groupe de Picard des variétés sphériques générales

3.1. On va étendre les résultats de la deuxième partie au cas d'une variété sphérique non nécessairement simple. Un tel objet étant obtenu par recollement de variétés sphériques simples, la situation n'a rien d'original par rapport aux variétés toriques (pour celles-ci, une référence complète est [0]). En conséquence, les démonstrations seront abrégées ou laissées au lecteur.

Soit X une variété sphérique. Pour toute orbite Y de G dans X, notons $\mathscr{V}_{X,Y}$ (resp. $\mathscr{D}_{X,Y}$) les valuations invariantes par G (resp. les couleurs) du plongement simple $X_{Y,G} = \{z \in X \mid Y \subset \overline{G\cdot z}\}$. Posons $\mathscr{V}_X = \bigcup_Y \mathscr{V}_{X,Y}$ et $\mathscr{D}_X = \bigcup_Y \mathscr{D}_{X,Y}$. Il est clair que tout diviseur de Weil sur X est linéairement équivalent à un diviseur stable par B; le groupe des classes de diviseurs de X est engendré par $\mathscr{D} \cup \mathscr{V}_X$, avec les relations $\operatorname{div}(f)$, $f \in \mathscr{P}^H$.

Pour tout $v \in \mathscr{V}_X$, notons X'_v la G-orbite de codimension 1 associée à v. La démonstration de la proposition suivante est immédiate.

Proposition. *Soit $d = \Sigma_{v \in \mathscr{V}_X} n_v \overline{X'_v} + \Sigma_{D \in \mathscr{D}} n_D \bar{D}$ un diviseur de Weil, stable par B. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *d est un diviseur de Cartier.*

(ii) *Pour toute orbite Y de G dans X, l'application de $\mathscr{V}_{X,Y} \cup \mathscr{D}_{X,Y}$ vers $\mathbb{Z}$ qui à v associe n_v, et à D associe n_D, se prolonge en une forme linéaire sur le cône $C(\mathscr{D}_{X,Y}, \mathscr{V}_{X,Y})$.*

Posons pour simplifier $C_{X,Y} = C(\mathscr{D}_{X,Y}, \mathscr{V}_{X,Y})$ et $C_X = \bigcup_Y C_{X,Y}$ (la réunion portant sur toutes les orbites de G dans X). A chaque diviseur de Cartier d, stable par B, est associée une fonction l_d sur C_X, à valeurs dans $\mathbb{Q}$. Cette fonction prend des valeurs entières sur $\mathscr{D}_X \cup \mathscr{V}_X$, et est linéaire sur chaque cône $C_{X,Y}$. De plus

$$d = \sum_{v \in \mathscr{V}_X} l_d(v)\overline{X'_v} + \sum_{D \in \mathscr{D}_X} l_D(v_D)\bar{D} + \sum_{D \in \mathscr{D}\setminus\mathscr{D}_X} n_D \bar{D}.$$

On en déduit sans mal le résultat suivant.

Théorème. *Par passage au quotient, l'application $d \to l_d$ définit une suite exacte*

$$0 \to \frac{\mathbb{Z}(\mathscr{D}\setminus\mathscr{D}_X)}{C_X^\perp} \to \operatorname{Pic}(X) \to \frac{\left\{\begin{array}{l}\text{fonctions sur } C_X, \text{ à valeurs}\\ \text{entières sur } \mathscr{D}_X \cup \mathscr{V}_X, \text{ linéaires sur tout } C_{X,Y}\end{array}\right\}}{\{\text{restrictions à } C_X \text{ des éléments de } \mathscr{P}^H\}} \to 0$$

3.2. Dans le cas particulier où la variété X est *sans couleur* (i.e., $\mathscr{D}_X$ est vide) et où H est d'indice fini dans son normalisateur, la suite exacte du théorème précédent s'interprète de façon agréable. Soit P le stabilisateur de l'orbite ouverte de B dans X. D'après [BP] Proposition 3.4, on peut choisir un sous-groupe de Levi L de P, et une sous-variété Z de X, stable par L, tels que:

• l'application naturelle de $P^u \times Z$ dans X induit un P-isomorphisme de $P^u \times Z$ sur $X \backslash \bar{\Delta}$.
• le groupe dérivé de L opère trivialement sur Z.

Il s'ensuit que Z est un plongement du tore $L/L \cap H$. L'éventail qui lui est associé s'identifie à la décomposition de C_X en les cônes $C_{X,Y}$ ([BP] §2).

On dispose d'autre part du plongement magnifique $\tilde{X}$ de G/H; il existe un unique morphisme de plongements $\varphi: X \to \tilde{X}$. Notons i l'inclusion de Z dans X.

PROPOSITION. *La suite* $0 \to C_X^\perp \to \mathrm{Pic}(\tilde{X}) \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Pic}(Z) \to 0$ *est exacte, et correspond à la suite exacte du théorème* 3.1.

Démonstration. D'après 2.2, le groupe de Picard de $\tilde{X}$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{Z}\mathscr{D}$. Il est clair que la flèche $\mathbb{Z}\mathscr{D}/C_X^\perp \to \mathrm{Pic}(X)$ provient de φ^*. En outre, puisque X est sans couleur, l'application qui au diviseur de Cartier d associe l_d, n'est autre que la restriction à $X \backslash \bar{\Delta} \simeq P^u \times Z$. Mais $\mathrm{Pic}(P^u \times Z) \simeq \mathrm{Pic}(Z)$ s'identifie au terme de droite dans la suite exacte du théorème 3.1 ([0] Proposition 2.1).

Les "variétés symétriques" de [DP II] ne sont autres que les plongements sans couleur des espaces symétriques; les résultats précédents permettent donc de décrire leur groupe de Picard.

3.3. Revenons au cas d'une variété sphérique quelconque X. Soit $d = \Sigma_{v \in \mathscr{V}_X} n_v \overline{X'_v} + \Sigma_{D \in \mathscr{D}} n_D \bar{D}$ un diviseur de Cartier sur X. On définit son poids par $\pi(d) = \Sigma_{D \in \mathscr{D}} n_D \pi(D)$. La proposition 2.4 se généralise aussitôt en la

PROPOSITION. (i) ${}^{(B)}H^0(X, d)$ *est l'ensemble des multiples des* $f \in \mathscr{P}^H$ *telles que* $f + l_d \geqslant 0$ *sur* C_X, *et que* $v_D(f) + n_D \geqslant 0$ *pour tout* $D \in \mathscr{D} \backslash \mathscr{D}_X$.

(ii) *Le* (G, G)*-module* $H^0(X, d)$ *est somme directe, avec multiplicité* 1, *des* (G, G)*-modules simples de poids* $\pi(d) + \pi(f)$, $f \in {}^{(B)}H^0(X, d)$.

Notons $\mathscr{C}(X, d)$ l'ensemble des $f \in \mathscr{P}^H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ telles que $f + l_d \geqslant 0$ sur C_X, et que $v_D(f) + n_D \geqslant 0$ pour tout $D \in \mathscr{D} \backslash \mathscr{D}_X$.

THÉORÈME. (i) *d est engendré par ses sections si et seulement si*

• *la fonction* l_d *est convexe, et*
• $n_D \geqslant l_d(v_D)$ *pour tout* $D \in \mathscr{D} \backslash \mathscr{D}_X$.

(ii) *d est ample si et seulement si*

• *la fonction* l_d *est strictement convexe, et*
• $n_D > l_d(v_D)$ *pour tout* $D \in \mathscr{D} \backslash \mathscr{D}_X$.

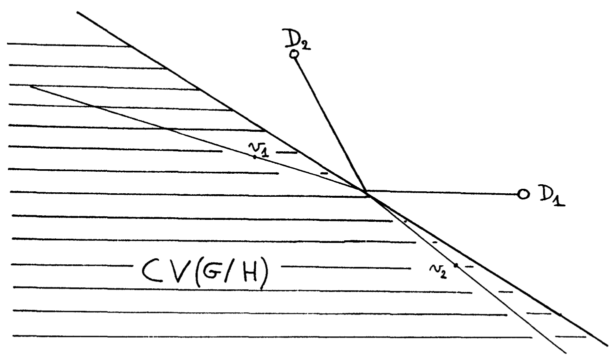
(Les démonstrations sont analogues à celles de 2.6).

Corollaire. *Pour une variété sphérique quelconque X, les conditions suivantes sont équivalentes*:

(a) *X est quasiprojective.*

(b) *Il existe une fonction sur C_X à valeurs dans $\mathbb{Q}$, strictement convexe, et linéaire sur chaque $C_{X,Y}$.*

Ce corollaire permet de construire facilement des variétés sphériques complètes non projectives de rang 2 (rappelons que toutes les variétés toriques de rang 2 sont quasiprojectives, et renvoyons à [0] p. 84 pour un exemple de variété torique complète non projective de rang 3). Prenons par exemple $G = SL(3, k)$ et $H = SL(2, k)$ (le groupe H est le stabilisateur d'un point p de k^3 et d'une forme linéaire f sur k^3, tels que $f(p) \neq 0$). La figure ci-dessous représente les valuations et les couleurs de l'espace homogène sphérique G/H (voir [Pa]).



Les cônes engendrés par D_1, v_1; v_1, v_2; D_2, v_2 définissent un plongement complet X de G/H ([BP] 2.7). Il est clair qu'il n'existe aucune fonction linéaire sur chacun des trois cônes, et strictement convexe; donc X n'est pas projective.

4. Calcul des nombres caractéristiques

4.1. Soit X une variété sphérique projective de dimension n. Dans cette partie, on va déterminer les nombres d'intersection $D_1^{a_1} \ldots D_r^{a_r}$ où $D_1, \ldots, D_r$ sont des diviseurs de Cartier sur X, et $a_1, \ldots, a_r$ des entiers positifs de somme n. Remarquons que le cône de $\mathrm{Pic}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ formé des classes des diviseurs amples, est ouvert dans $\mathrm{Pic}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ (cela résulte facilement de 3.3). Par conséquent, les nombres d'intersection sont déterminés par les valeurs de d^n pour tout diviseur de Cartier ample d. On va exprimer les d^n par une formule intégrale, qui fait intervenir quelques notations supplémentaires.

Soit T un tore maximal de B; notons R le système de racines de (G, T), et R^+ l'ensemble des racines de $(B \cdot T)$. On identifie $\mathscr{P}^H$ à un sous-groupe du groupe $X^*(T)$ des caractères de T; en effet chaque élément de $\mathscr{P}^H$ est déterminé par son poids par rapport à B. Du même coup, $\mathscr{C}(X, d)$ est identifié à un polyèdre convexe dans $X^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Puisque d est ample, $\mathscr{C}(X, d)$ engendre $\mathscr{P}^H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. On note E l'ensemble des racines positives et orthogonales à $\pi(d) + \mathscr{C}(X, d)$.

THÉORÈME. *Le degré de tout diviseur ample d est donné par*

$$d^n = n! \int_{\mathscr{C}(X,d)} \varphi(\pi(d) + \lambda)\, d\lambda$$

où $\varphi(\lambda) = \Pi_{\alpha \in R^+ \setminus E} (\lambda, \alpha) \cdot (\rho, \alpha)^{-1}$, *et où* $d\lambda$ *est la mesure de Lebesgue sur* $\mathscr{P}^H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, *normalisée de façon que la maille du réseau* $\mathscr{P}^H$ *soit de volume* 1.

Démonstration. Pour q assez grand, la caractéristique d'Euler de qd est un polynôme en q, dont le terme dominant est $(n!)^{-1} d^n q^n$ [Kl 2]. Puisque d est ample, on a $H^i(X, qd) = 0$ pour tout $i > 0$ et tout q assez grand, donc la dimension de $H^0(X, qd)$ a pour terme dominant $(n!)^{-1} d^n q^n$. Mais d'après la proposition 3.3, le (G, G)-module $H^0(X, qd)$ est la somme directe des (G, G)-modules simples de plus grand poids $q\pi(d) + \lambda$, où λ décrit $\mathscr{P}^H \cap \mathscr{C}(X, qd) = \mathscr{P}^H \cap q\mathscr{C}(X, d)$. En notant $\Phi(\lambda)$ la dimension du (G, G)-module simple de plus grand poids λ, on a donc

$$\frac{d^n}{n!} \frac{1}{q^n} \lim_{q \to \infty} \sum_{\lambda \in \mathscr{P}^H \cap q\mathscr{C}(X,d)} \Phi(q\pi(d) + \lambda)$$

Ecrivons $\Phi = \Sigma_{m \geqslant 0} \Phi_m$, où chaque Φ_m est une fonction polynômiale de degré m. On a

$$\sum_{\lambda \in \mathscr{P}^H \cap q\mathscr{C}(X,d)} \Phi_m(q\pi(d) + \lambda)$$

$$= q \sum_{\mu \in (1/q)\mathscr{P}^H \cap \mathscr{C}(X,d)} \Phi_m(\pi(d) + \mu) \sim q^{m+l} \int_{\mathscr{C}(X,d)} \Phi_m(\pi(d) + \mu)\, d\mu$$

où l est la dimension de $\mathscr{C}(X, d)$, c'est-à-dire le rang de la variété sphérique X.

On sait que $\Phi(\lambda) = \Pi_{\alpha \in R^+} (1 + (\lambda, \alpha) \cdot (\rho, \alpha)^{-1})$ donc chaque Φ_m prend des valeurs non négatives sur $\pi(d) + \mathscr{C}(X, d)$ (qui est formé de poids dominants), et le terme de plus haut degré qui contribue à la somme des Φ_m, est égal à $\Pi_{\alpha \in R^+ \setminus E} (\lambda, \alpha) \cdot (\rho, \alpha)^{-1} = \varphi(\lambda)$. Le théorème en résulte aussitôt.

4.2. Pour simplifier, supposons que X est sans couleur. Essayons de préciser l'énoncé du théorème ci-dessus, pour aboutir à une méthode de calcul des nombres caractéristiques.

Comme en 3.2, soit P le stabilisateur de l'orbite ouverte de B dans X. C'est un sous-groupe de G, qui contient B; il est donc déterminé par l'ensemble I des racines simples α de R^+, telles que $-\alpha$ soit racine de P. Notons R_I le sous-système de racines de R engendré par I.

Remarquons que $E = R_I^+$. En effet on déduit de [BP] 2.9, que toute racine de R_I est orthogonale à $\mathscr{P}^H$. En outre d est stable par P, donc toute racine de R_I est aussi orthogonale à $\pi(d)$; donc R_I est inclus dans E. Enfin, le cardinal de $R^+ \setminus E$ est le degré de φ, c'est-à-dire $n - l$ d'après le théorème 4.1. Mais on a, avec les notations de 3.2: $n = \dim X = \dim(P^u \times Z) = \mathrm{card}(R^+ \backslash R_I) + l$, donc $\mathrm{card}(R^+ \backslash E) = \mathrm{card}(R^+ \backslash R_I)$.

Il faut intégrer le polynôme φ sur le polyèdre convexe $\mathscr{C}(X, d)$. Cela se fait en trois étapes:

(i) On décompose $\mathscr{C}(X, d)$ en simplexes.

(ii) On écrit φ comme somme de puissances de formes linéaires.

(iii) L'intégrale d'une puissance d'une forme linéaire sur un simplexe se calcule par une formule explicite.

(Puisque tout polynôme est somme de puissances de formes linéaires, on a ainsi une méthode pour calculer l'intégrale des polynômes sur les polyèdres).

Les deux lemmes suivants permettent de réaliser les étapes (ii) et (iii).

LEMME 1. *Soit W (resp. W_I) le groupe de Weyl de R (resp. R_I). Posons $N = \mathrm{card}\, R^+$ et $N_I = \mathrm{card}\, R_I^+$; Alors*

$$(N - N_I)! \prod_{\alpha \in R^+ \backslash R_I} (\lambda, \alpha) \cdot (\rho, \alpha)^{-1} \cdot \prod_{\alpha \in R^+} (\mu, \alpha) = \sum_{w \in W/W_I} \varepsilon(w)(w\lambda, \mu)^{N-N_I} \prod_{\alpha \in R_I^+} (\mu, w\alpha).$$

pour tout λ orthogonal à I, et tout μ.

Démonstration. Traitons d'abord le cas où I est vide: il faut montrer que

$$(*) \qquad N! \prod_{\alpha \in R^+} (\lambda, \alpha) \cdot (\mu, \alpha) \cdot (\rho, \alpha)^{-1} = \sum_{w \in W} \varepsilon(w)(w\lambda, \mu)^N.$$

Remarquons que le membre de droite est un polynôme de degré N en λ et μ, symétrique, et qu'il s'annule lorsque λ est orthogonal à une racine. Il existe donc une constante c telle que

$$N! \prod_{\alpha \in R^+} (\lambda, \alpha) \cdot (\mu, \alpha) \cdot (\rho, \alpha)^{-1} = c \sum_{w \in W} \varepsilon(w)(w\lambda, \mu)^N.$$

Mais $\Sigma_{w \in W} \varepsilon(w) w(e^{t\rho}) = \Pi_{\alpha \in R^+} (e^{t\alpha/2} - e^{-t\alpha/2})$ où t est une indéterminée. Considérons le coefficient de t^N dans cette identité: il vient

$$N!^{-1} \sum_{w \in W} \varepsilon(w) w(\rho)^N = \prod_{\alpha \in R^+} \alpha$$

d'où

$$\sum_{w \in W} \varepsilon(w)(w(\rho), \mu)^N = N! \prod_{\alpha \in R^+} (\mu, \alpha).$$

En prenant $\lambda = \rho$, on conclut que $c = 1$.

Traitons maintenant le cas général. On sait que

$$N! \prod_{\alpha \in R^+} (\lambda + \rho, \alpha) \cdot (\mu, \alpha) \cdot (\rho, \alpha)^{-1} = \sum_{w \in W} \varepsilon(w)(w(\lambda + \rho), \mu)^N.$$

Si de plus λ est orthogonal à I, le membre de gauche est un polynôme en λ, de degré $N - N_I$, et de terme dominant

$$N! \prod_{\alpha \in R^+ \setminus R_I} (\lambda, \alpha) \cdot (\rho, \alpha)^{-1} \cdot \prod_{\alpha \in R^+} (\mu, \alpha) = \binom{N}{N_I} \sum_{w \in W} \varepsilon(w)(w\lambda, \mu)^{N-N_I} \cdot (w\rho, \mu)^{N_I}.$$

Or

$$\begin{aligned}
&\sum_{w \in W} \varepsilon(w)(w\lambda, \mu)^{N-N_I}(w\rho, \mu)^{N_I} \\
&\quad = \sum_{w_1 \in W/W_I} \varepsilon(w_1)(w_1\lambda, \mu)^{N-N_I} \sum_{w \in W_2} \varepsilon(w_2)(w_1 w_2 \rho, \mu)^{N_I} \\
&\quad = \sum_{w_1 \in W/W_I} \varepsilon(w_1)(w_1\lambda, \mu)^{N-N_I} \cdot N_I! \prod_{\alpha \in R_I^+} (\rho, \alpha) \cdot (w_1^{-1}\mu, \alpha) \cdot (\rho_I, \alpha)^{-1}
\end{aligned}$$

(on applique l'identité $(*)$ au système de racines R_I).

Puisque $(\rho, \alpha) = (\rho_I, \alpha)$ pour tout $\alpha \in R_I$, on a

$$\sum_{w \in W} \varepsilon(w)(w\lambda, \mu)^{N-N_I}(w\rho, \mu)^N = N_I! \sum_{w \in W/W_I} \varepsilon(w)(w\lambda, \mu)^{N-N_I} \prod_{\alpha \in R_I^+} (\mu, w\alpha).$$

Le lemme 1 s'en déduit immédiatement.

COROLLAIRE.
$$(N - N_I)! \prod_{\alpha \in R^+ \setminus R_I} (\lambda, \alpha) \cdot (\rho, \alpha)^{-1} = \sum_{w \in W^I} \varepsilon(w)(w\lambda, \rho)^{N-N_I} \prod_{\alpha \in R^+ \setminus w(R_I)} (\rho, \alpha)^{-1}.$$
où W^I est l'ensemble des $w \in W$ tels que $w(I) \subset R^+$.

Démonstration. On sait que W^I est un système de représentants de W/W_I. Substituons ρ à μ dans le lemme 1: on obtient

$$(N - N_I)! \prod_{\alpha \in R^+ \setminus R_I} (\lambda, \alpha) \cdot (\rho, \alpha)^{-1} = \sum_{w \in W^I} \varepsilon(w)(w\lambda, \rho)^{N-N_I} \prod_{\alpha \in R_I^+} (\rho, w\alpha) \prod_{\alpha \in R^+} (\rho, \alpha)^{-1}.$$

De plus, puisque $w(R_I^+) \subset R^+$ pour tout $w \in W^I$, on a

$$\prod_{\alpha \in R_I^+} (\rho, w\alpha) \cdot \prod_{\alpha \in R^+} (\rho, \alpha)^{-1} = \prod_{\alpha \in R^+ \setminus w(R_I)} (\rho, \alpha)^{-1}.$$

LEMME 2. *Soit $[a_0, \ldots, a_l]$ le simplexe de sommets $a_0, \ldots, a_l$ dans un espace affine réel $\mathbb{A}$ de dimension l. Soit f une application affine de $\mathbb{A}$ vers $\mathbb{R}$. Alors*

$$\int_{[a_0, \ldots, a_l]} f^p \, dm = \frac{l! \operatorname{vol}[a_0, \ldots, a_l]}{(p+1)\ldots(p+l)} h_p(f(a_0), \ldots, f(a_l))$$

où dm est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{A}$, et où $h_l(x_0, \ldots, x_l)$ est la somme de tous les monômes de degré p en $x_0, \ldots, x_l$.

Démonstration. Par récurrence sur l. Pour $l = 1$, on a:

$$\int_{a_0}^{a_1} (ux + v)^p \, dm = \frac{(ua_1 + v)^{p+1} - (ua_0 + v)^{p+1}}{u(p+1)} = \frac{a_1 - a_0}{p+1} \frac{f(a_1)^{p+1} - f(a_0)^{p+1}}{f(a_1) - f(a_0)}$$

$$= \frac{a_1 - a_0}{p+1} h_p(f(a_0), f(a_1)).$$

Supposons que le lemme 2 est vrai en dimension $l - 1$. Choisissons des coordonées $x_1, \ldots, x_l$ sur $\mathbb{A}$, telles que $a_0, \ldots, a_l$ soit le simplexe "standard", de sommets $(0, \ldots, 0)$, $(1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, \ldots, 0, 1)$. Posons $f(a_i) = f_i$ pour $0 \leqslant i \leqslant l$. On doit calculer

$$\int_{[a_0, \ldots, a_l]} f^p \, dm = \int_{[a_0, \ldots, a_l]} (f_0 + (f_1 - f_0)x_1 + \cdots + (f_l - f_0)x_l)^p \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_l$$

$$= \int_{\partial[a_0, \ldots, a_l]} (p+1)(f_1 - f_0)^{-1}(f_0 + (f_1 - f_0)x_1 + \cdots$$

$$+ (f_l - f_0)x_l)^{p+1} \, dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_l$$

d'après la formule de Stokes. Mais la forme $dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_l$ est nulle sur toutes les faces du simplexe, excepté sur celles d'équations $x_1 = 0$ et $x_1 + \cdots + x_l = 1$. Grâce à l'hypothèse de récurrence, on a

$$\int_{[a_0, \ldots, a_l]} f^p \, dm$$

$$= \frac{1}{(p+1)(f_1 - f_0)(p+2)\ldots(p+l)} (h_{p+1}(f_1, \ldots, f_l) - h_{p+1}(f_0, \ldots, f_l))$$

$$= \frac{1}{(p+1)\ldots(p+l)} h_p(f_0, \ldots, f_l).$$

(On utilise le fait que le volume du simplexe standard de dimension l est $(l!)^{-1}$).

En assemblant tous ces morceaux, on aboutit à l'énoncé suivant:

PROPOSITION. *Soit $a_0, \ldots, a_l$ un simplexe obtenu par subdivision de $\mathscr{C}(X, d)$. Sa contribution au degré de d est égale à*

$$\frac{l! \operatorname{vol}[a_0, \ldots, a_l]}{\prod_{\alpha \in R^+} (\rho, \alpha)} \sum_{R^+ \setminus R_l = E_0 \cup \cdots \cup E_l} e_0! \ldots e_l! \prod_{i=0}^{l} \left(\prod_{\alpha \in E_i} (a_i, \alpha) \right)$$

où la somme porte sur toutes les partitions de $R^+ \backslash R_I$ en $(l+1)$ sous-ensembles de cardinaux $e_0, \ldots, e_l$.

Démonstration. Cette contribution est égale à

$$n! \int_{[a_0, \ldots, a_l]} \varphi(\lambda)\, d\lambda = (N - N_I + l)! \int_{[a_0, \ldots, a_l]} \prod_{\alpha \in R^+ \backslash R_I} (\lambda, \alpha)(\rho, \alpha)^{-1}\, d\lambda$$

$$= (N - N_I + l)!(N - N_I)!^{-1} \sum_{w \in W^I} \varepsilon(w) \prod_{\alpha \in R^+ \backslash R_I} (\rho, \alpha)^{-1}$$

$$\int_{[a_0, \ldots, a_l]} (w\lambda, \rho)^{N - N_I}\, d\lambda$$

(d'après le lemme 1)

$$= \frac{(N - N_I + l)!}{(N - N_I)!} \sum_{w \in W^I} \varepsilon(w) \prod_{\alpha \in R_I^+} (\rho, \alpha)^{-1} \frac{l!\ \mathrm{vol}[a_0, \ldots, a_l]}{(N - N_I + 1) \ldots (N - N_I + l)}$$

$$h_{N - N_I}((wa_0, \rho), \ldots, (wa_l, l))$$

(d'après le lemme 2)

$$= \frac{l!\ \mathrm{vol}[a_0, \ldots, a_l]}{\prod_{\alpha \in R^+} (\rho, \alpha)} \sum_{w \in W^I} \varepsilon(w) \prod_{\alpha \in R_I^+} (\rho, w\alpha)\, h_{N - N_I}((wa_0, \rho), \ldots, (wa_l, \rho)).$$

Mais on a

$$(N - N_I)! \prod_{\alpha \in R^+ \backslash R_I} (a_0 + \cdots + a_l, \alpha) = \sum_{w \in W^I} \varepsilon(w) \prod_{\alpha \in R_I^+} (\rho, w\alpha)\, (w(a_0 + \cdots + a_l, l)^{N - N_I}.$$

Soient $e_0, \ldots, e_l$ des entiers positifs ou nuls, de somme $N - N_I$. Le terme de multidegré $(e_0, \ldots, e_l)$ dans l'identité ci-dessus est

$$(N - N_I)! \sum_{R^+ \backslash R_I = E_0 \cup \cdots \cup E_l} \prod_{i=0}^{l} \prod_{\alpha \in E_i} (a_i, \alpha)$$

$$= \frac{(N - N_I)!}{e_0! \ldots e_l!} \sum_{w \in W^I} \varepsilon(w) \prod_{\alpha \in R_I^+} (\rho, w\alpha) \prod_{i=0}^{l} (wa_i, \rho)^{e_i}.$$

Puisque $h_{N - N_I}(x_0, \ldots, x_l)$ est la somme des monômes $x_0^{e_0} \ldots x_l^{e_l}$ pour $e_0 + \cdots + e_l = N - N_I$, la proposition s'en déduit aussitôt.

Remarques. (i) Les a_i étant des poids dominants, la proposition exprime le degré d'un diviseur ample comme somme d'entiers non négatifs, et se prête donc au calcul numérique.

(ii) Pour toute fonction polynomiale F, homogène de degré p, posons

$$(\Pi_l F)(a_0, \ldots, a_l) = (p!)^{-1} \sum_{e_0 + \cdots + e_l = p} \frac{\partial^p}{\partial^{e_0} T_0 \ldots \partial^{e_l} T_l} F(a_0 T_0 + \cdots + a_l T_l),$$

où $T_0, \ldots, T_l$ sont des indéterminées. Puisque Π_l est linéaire et que

$$(\Pi_l f^p)(a_0, \ldots, a_l) = h_p(f(a_0), \ldots, f(a_l))$$

pour toute forme linéaire f, on a

$$\int_{[a_0, \ldots, a_l]} F(\lambda)\, d\lambda = \frac{l! \operatorname{vol}[a_0, \ldots, a_l]}{(p+1)\ldots(p+l)} (\Pi_l F)(a_0, \ldots, a_l).$$

On peut ainsi démontrer la proposition sans avoir recours au lemme 1. Cependant, celui-ci a une interprétation géométrique, qui sera expliquée en 4.5.

4.3. *Exemples*

(a) *Plongements toriques.* Lorsque $G = T$ est un tore, et que $H = \{1\}$, le théorème 4.1 donne, pour tout plongement projectif X de T et tout diviseur ample d sur X:

$$d^n = n! \operatorname{vol} \mathscr{C}(X, d).$$

Ici, le polyèdre $\mathscr{C}(X, d)$ se trouve dans $X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, où $X_*(T)$ désigne le réseau des sous-groupes à un paramètre de T. Ce résultat est bien connu ([0], Corollary 2.23).

(b) *Variétés de drapeaux.* Soit Q un sous-groupe parabolique de G, tel que BQ soit ouvert dans G; on considère la variété $X = G/Q$. A cause de la décomposition de Bruhat, c'est une variété sphérique de rang 0. Le sous-groupe parabolique associé P est opposé à Q. Soit M_λ un G-module simple de plus petit poids $-\lambda$, contenant une droite dont le stabilisateur est Q. Avec les notations de 4.2, on voit sans mal que R_I est l'ensemble des racines orthogonales à λ, et que le degré de X dans $\mathbb{P}(M_\lambda)$ est

$$(N - N_I)! \prod_{\alpha \in R^+ \setminus R_I} (\lambda, \alpha) \cdot (\rho, \alpha)^{-1}.$$

Par exemple, prenons pour X la grassmanienne des sous-espaces de dimension d de $\mathbb{P}^n$. On trouve que le degré du plongement de Plücker de X est égal à

$$\frac{[(d+1)(n-p)]!\, 1!\, 2! \ldots p!}{n!(n-1)! \ldots (n-p)!}.$$

Ce résultat est dû à Schubert ([Sc 2] et [Sc 3]).

On voit aussi que le degré de la variété des drapeaux de G, plongée dans $\mathbb{P}(M_\lambda)$, est $N!\dim M_{\lambda-\rho}$ pour tout poids dominant régulier λ. Bien sûr, ces formules se démontrent par d'autres méthodes, grâce à la détermination de l'anneau de Chow de G/P, ou à l'action d'un tore maximal de G. On reviendra là-dessus en 4.5.

(c) *Coniques complètes.* Afin de tester les méthodes de 4.1 et 4.2 dans un cas simple, retrouvons les nombres caractéristiques des coniques complètes (voir par exemple [Sc 1] §20). Avec les notations de 2.7, il s'agit de calculer $(m\lambda + n\mu)^5$. Le polygone convexe $\mathscr{C}(X, m\lambda + n\mu)$ a pour sommets 0, $(2m+n)\omega_1$, $(m+2n)\omega_2$, $2(m\omega_1 + n\omega_2)$. La contribution du triangle de sommets 0, $(2m+n)\omega_1$, $2(m\omega_1 + n\omega_2)$ à $(m\lambda + n\mu)^5$ est, d'après la proposition 4.2:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}[(2m+n)\omega_1 \wedge 2(m+n)\omega_2] \\
&\qquad \times [3!(2m\omega_1 + 2n\omega_2, \alpha)(2m\omega_1 + 2n\omega_2, \beta)(2m\omega_1 + 2n\omega_2, \alpha+\beta) \\
&\qquad + 2!((2m+n)\omega_1, \alpha)(2m\omega_1 + 2n\omega_2, \beta)(2m\omega_1 + 2n\omega_2, \alpha+\beta) \\
&\qquad + 2!(2m\omega_1 + 2n\omega_2, \alpha)(2m\omega_1 + 2n\omega_2, \beta)((2m+n)\omega_1, \alpha+\beta) \\
&\qquad + 2!((2m+n)\omega_1, \alpha)(2m\omega_1 + 2n\omega_2, \beta)((2m+n)\omega_1, \alpha+\beta)] \\
&\quad = \frac{n(2m+n)}{12}[24mn(2m+2n) + 4n(2m+n)(2m+2n) + 8mn(2m+n) \\
&\qquad + 4n(2m+n)^2] \\
&\quad = n^2(2m+n)(8m^2 + 8mn + n^2).
\end{aligned}$$

De même, la contribution du triangle de sommets 0, $(m+2n)\omega_2$, $2(m\omega_1 + n\omega_2)$ est $m^2(m+2n)(m^2 + 8mn + 8n^2)$.

On obtient finalement

$$(m\lambda + n\mu)^5 = m^5 + 10m^4n + 40m^3n^2 + 40m^2n^3 + 10mn^4 + n^5$$

c'est-à-dire $\lambda^5 = \mu^5 = 1$; $\lambda^4\mu = \lambda\mu^4 = 2$; $\lambda^3\mu^2 = \lambda^2\mu^3 = 4$ comme il se doit.

4.4. On peut également retrouver, par exemple, les nombres caractéristiques des coniques dans $\mathbb{P}^3$. Cependant, il semble plus intéressant de suivre dans ce cas la "méthode de dégénerescence" employée par Schubert, Zeuthen .... En voici le principe: dans une G-variété (lisse) X, considérons un diviseur irréductible G-stable Y (appelé par Schubert "condition invariante simple"). Si $D_1, \ldots, D_r$ sont des diviseurs sur X, le nombre d'intersection $D_1^{a_1} \ldots D_r^{a_r} \cdot Y$ se détermine uniquement sur Y. La variété Y est plus accessible que X, dont elle représente une "dégénerescence". On obtient ainsi des relations entre nombres caractéristiques de X.

Dans notre cas, X est une G-variété sphérique (disons simple, sans couleur et lisse) de rang l. Alors Y est une G-variété sphérique, simple, sans couleur et lisse, de rang $l-1$ (voir [BP] §3). Les groupes de Picard de X et de Y sont munis de bases canoniques, formées par les diviseurs irréductibles B-stables (voir 2.2). Si l'on connaît la restriction de $\mathrm{Pic}(X)$ à $\mathrm{Pic}(Y)$, et les nombres caractéristiques de Y, on en déduit tous les monômes de la forme $D^{\dim Y}\cdot Y$. Il faut encore exprimer les classes des diviseurs irréductibles G-stables de X, dans le groupe de Picard de X. Cela se fait en écrivant (avec les notations du §2) $\Sigma_{v\in\mathscr{V}_X} v(f)\overline{X'_v} + \Sigma_{D\in\mathscr{D}} v_D(f)\bar{D} = \mathrm{div}(f) = 0$ dans $\mathrm{Pic}(X)$, pour tout $f\in\mathscr{P}^H$.

Traitons par exemple le cas de la variété X des coniques complètes dans $\mathbb{P}^3$, avec le diviseur $Y=\eta$ (notations de 2.7). Les points de Y sont les coniques dégénérées en deux points sur une droite, avec un plan contenant cette droite. La variété Y est le plongement magnifique de G/H, où $G=SL(4)$ et H est l'ensemble des matrices de la forme

$$\left(\begin{array}{c|cc} A & \multicolumn{2}{c}{*} \\ \hline \multirow{2}{*}{0} & * & * \\ & 0 & * \end{array}\right) \quad \text{où } A \text{ est dans le normalisateur du tore standard de } GL(2).$$

Le groupe de Picard de Y est engendré librement par D_1, D_2, D_3 de poids respectifs $2\omega_3, \omega_2, \omega_1$. Pour le diviseur ample $D=a_1D_1+a_2D_2+a_3D_3$, le convexe $\pi(D)+\mathscr{C}(Y,D)$ est l'intervalle $[(a_1+a_2)\omega_2+a_3\omega_1; 2a_1\omega_3+a_2\omega_2+a_3\omega_1]$. On le paramètre par $t\to 2t\omega_3+(a_1+a_2-t)\omega_2+a_3\omega_1$, $0\leqslant t\leqslant a_1$. Avec les notations de 4.2, on a $I=\varnothing$ et $R^+=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\}$. Le degré de D est donc

$$D^7 = 7!\int_0^{a_1} 2t(a_1+a_2-t)a_3(a_1+a_2+t)(a_1+a_2+a_3-t)(a_1+a_2+a_3+t)\frac{dt}{12}$$

et on trouve

$$\begin{aligned} D^7 = 35(&2a_1^6a_3 + 12a_1^5a_2a_3 + 6a_1^5a_2^2 + 30a_1^4a_2^2a_3 + 30a_1^4a_2a_3^2 + 3a_1^4a_3^3 \\ &+ 24a_1^3a_2^2a_3 + 36a_1^3a_2^2a_3^2 + 12a_1^3a_2a_3^3 + 6a_1^2a_2^4a_3 + 12a_1^2a_2^3a_3^3 + 6a_1^2a_2^2a_3^3). \end{aligned}$$

D'autre part, la restriction de ρ (resp. μ, ν) à Y est égale à D_1 (resp. $2D_3$, D_2); en effet il suffit de considérer les poids de ces diviseurs. Par suite $\eta(a_1\rho+\frac{1}{2}a_2\nu+a_3\mu)^7 = D^7$, c'est-à-dire

$$\eta\rho^6\mu=10;\quad \eta\rho^5\mu\nu=20;\quad \eta\rho^5\mu^2=10;\quad \eta\rho^4\mu\nu^2=40;$$

$$\eta\rho^4\mu^2\nu=20;\quad \eta\rho^4\mu^3=3;\quad \eta\rho^3\mu\nu^3=48;\quad \eta\rho^3\mu^2\nu^2=24;$$

$$\eta\rho^3\mu^3\nu=6;\quad \eta\rho^2\mu\nu^4=32;\quad \eta\rho^2\mu^2\nu^3=16;\quad \eta\rho^2\mu^3\nu^2=4$$

et les autres monômes sont nuls. On vérifie ainsi les résultats de [Sc 1] §20.

4.5. *Commentaires et généralisations possibles.* Soit X une variété algébrique lisse munie d'une opération du groupe multiplicatif k^* avec points fixes isolés. On dispose de résultats reliant la cohomologie de X et les points fixes de k^*. En particulier, si L est un fibré en droites k^*-linéarisé sur X, le degré de L est la somme sur les points fixes $p_1, \ldots, p_r$, des nombres $(\text{dét } A_i)^{-1} n_i^{\dim X}$ où

- n_i est l'entier tel que l'action de $t \in k^*$ sur la fibre de L en p_i, soit la multiplication par t^{n_i}.
- A_i est l'endomorphisme de l'espace tangent en p_i à X, provenant de l'action infinitésimale de k^*. (Voir [Bott]).

Lorsqu'on applique ce résultat à la variété G/P, où l'action de k^* est donnée par un sous-groupe à un paramètre μ de T, l'ensemble des points fixes (pour μ générique) est $W^I \cdot x$ (avec les notations de 4.2). Si $L = L_\lambda$ est le fibré en droites associé au caractère λ de P, on a dans l'énoncé précédent: $n_w = (w\lambda, \mu)$ et dét $A_w = \varepsilon(w) \prod_{\alpha \in R^+ \setminus w(R_I)} (\alpha, \mu)$ pour tout $w \in W^I$. Par suite, le degré de L est

$$\sum_{w \in W^I} \varepsilon(w)(w\lambda, \mu)^{N-N_I} \prod_{\alpha \in R^+ \setminus w(R_I)} (\mu, \alpha)$$

En comparant avec le résultat de 4.3 b), on retrouve l'identité du lemme 1. (Voir [AC] et ses références pour l'étude de l'anneau de Chow de G/P par cette méthode).

Plus généralement, si X est une variété projective lisse où le groupe réductif G opère avec un nombre fini d'orbites, tout tore maximal de G n'a qu'un nombre fini de points fixes dans X ([DP I] Proposition 7.2). On peut donc déterminer les "nombres caractéristiques" de X grâce à la formule de Bott rappelée ci-dessus. Cette méthode doit s'appliquer par exemple au schéma de Hilbert des cubiques gauches, étudié dans [PS]. Elle fonctionne également pour les variétés sphériques projectives lisses. Mais pour celles-ci, il semble plus efficace de procéder comme en 4.1 et 4.2. En eefet, on n'a pas besoin de supposer que X est lisse et (plus sérieusement) on sait peu de choses sur les points fixes d'un tore dans une variété sphérique (voir cependant [DP I] §7 et [DS] §2 pour le cas des compactifications magnifiques des espaces symétriques).

Voici une autre approche possible pour le calcul des nombres caractéristiques. On suppose que k est le corps des nombres complexes. Soit T_c un sous-tore compact maximal du tore T. Soient V un T-module, et X une sous-variété fermée T-stable de $\mathbb{P}(V)$. Choisissons un produit scalaire hermitien, invariant par T_c, sur V. On hérite d'une application moment $J: X \to t^*$ (où $\underline{t}$ est l'algèbre de Lie de T_c) définie par la forme kählerienne ω sur X, associée au produit scalaire (voir [DH]). Le degré de X dans $\mathbb{P}(V)$ est alors

$$\int_X \omega^n = \int_{J(X)} J_*(\omega^n)$$

où n est la dimension (complexe) de X. Or $J(X)$ est un poyèdre convexe; plus précisément, c'est l'enveloppe convexe des images par J des points fixes de T_c (i.e.

de T). De plus l'intégrale

$$\int_X e^{J(x)(\mu)} \omega_x^n$$

(où μ est un élément de $\underline{t}$) s'exprime uniquement en fonction des points fixes de T, si μ est "assez général" ([DH] Theorem 4.1). En faisant tendre μ vers 0, on retrouve la formule de Bott.

Plus généralement, soit G un groupe réductif d'automorphismes de V, contenant T comme sous-tore maximal. On a encore une application moment $J: X \to \underline{g}^*$, où $\underline{g}$ est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe compact maximal de G. Soit $\underline{t}^*_+$ une chambre de Weyl dans $\underline{t}^*$. L'intersection $J(X) \cap \underline{t}^*_+$ est un polyèdre convexe Γ. Lorsque X est sphérique, on peut identifier Γ et $\pi(d) + \mathscr{C}(X, d)$ où d est la section de X par un hyperplan stable par B. De plus, on peut montrer que pour tout $\mu \in t$:

$$\int_X e^{J(x)(\mu)} \frac{\omega^n}{n!} = \frac{1}{\prod_{\alpha \in R^+} (\mu, \alpha)} \sum_{w \in W} \varepsilon(w) \int_\Gamma e^{(w\mu, \lambda)}\, d\lambda$$

si $J(X) \cap \underline{t}^*_+$ contient des points réguliers (dans le cas général, on a une expression un peu plus compliquée). En faisant tendre μ vers 0, on obtient

$$(n!)^{-1} \deg(X) = \frac{1}{\prod_{\alpha \in R^+} (\mu, \alpha)} \sum_{w \in W} \varepsilon(w) \frac{(w\mu, \lambda)^N}{N!}\, d\lambda$$

$$= \int_\Gamma \prod_{\alpha \in R^+} (\lambda, \alpha) \cdot (\rho, \alpha)^{-1}\, d\lambda \qquad \text{d'après le lemme 1}.$$

Ces résultats, et leurs liens avec la K-théorie équivariante, sortent du cadre de cet article, et seront développés ultérieurement.

RÉFÉRENCES

[AB] M. F. ATIYAH ET R. BOTT, *The moment map and equivariant cohomology*, Topology **23** (1984), 1–28.

[AC] E. AKYILDIZ ET J. B. CARRELL, *An algebraic formula for the Gysin homomorphism from G/B to G/P*, Illinois J. of Math. **31** (1987), 312–320.

[ADK] S. ABEASIS, A. DELFRA, ET H. KRAFT, *The geometry of representations of A_m*, Math. Ann. **256** (1981), 401–418.

[BB] A. BIALYNICKI-BIRULA, *On action of $SL(2)$ on complete algebraic varieties*, Pac. J. of Math. **86** (1980), 53–58.

[BH] H. BASS ET W. HABOUSH, *Linearizing certain reductive group actions*, Trans. Amer. Math. Soc. **292** (1985), 463–482.

[B1] M. BRION, *Quelques propriétés des espaces homogènes sphériques*, Manuscripta Math. **55** (1986), 191–198.

[B2] ———, *Sur l'image de l'application moment* (Séminaire d'algèbre M. P. Malliavin 1987), Springer Lecture Note **1296**.

[BLV] ———, D. LUNA, ET T. VUST, *Espaces homogènes sphériques*, Inventiones Math. **84** (1986), 617–632.

[BP] ——— ET F. PAUER, *Valuations des espaces homogènes sphériques*, Comment. Math. Helv. **62** (1987), 265–285.

[Bott] R. BOTT, *A residue formula for holomorphic vector fields*, J. Diff. Geom. **4** (1967), 311–332.

[DH] J. J. DUISTERMAAT ET G. HECKMAN, *On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space*, Inventiones Math. **69** (1982), 259–268.

[DP] C. DE CONCINI ET C. PROCESI, *Cohomology of compactifications of algebraic groups*, Duke Math. J. **53** (1986) 585–594.

[DP I] ———, *Complete symmetric varieties I*, Invariant theory, Springer L. N. 996 (1983).

[DP II] ———, *Complete symmetric varieties II*, Algebraic groups and related topics, Advanced studies in pure mathematics n^0 6 (1985).

[DGMP] C. DE CONCINI, M. GORESKY, R. MAC PHERSON, ET C. PROCESI, *On the geometry of quadrics*, Comment. Math. Helv. **63** (1988), 337–413.

[DS] C. DE CONCINI ET T. A. SPRINGER, "Betti numbers of complete symmetric varieties," *Geometry Today* (Birkhäuser 1985).

[K...] G. KEMPF, F. KNUDSEN, D. MUMFORD, ET B. SAINT-DONAT, *Toroidal Embeddings*. Springer L. N. 339 (1973).

[Ke] G. KEMPF, *Images of homogeneous vector bundles and the variety of complexes*, Bulletin of the Amer. Math. Sec. **81** (1975), 900–901.

[Kl1] S. KLEIMAN, *The transversality of a general translate*, Compositio Math. **28** (1974), 287–297.

[Kl2] ———, *Towards a numerical theory of ampleness*, Annals of Math. **84** (1966), 293–344.

[Kr] H. KRAFT, *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie*, Vieweg, 1985.

[L1] D. LUNA, *Report on spherical varieties*, Manuscript, 1986.

[L2] ———, *Slices étales*, Mémoire de la S. M. F. **33** (1973), 81–105.

[LV] D. LUNA ET T. VUST, *Plongements d'espaces homogènes*, Comment. Math. Helv. **58** (1983), 186–245.

[MF] D. MUMFORD ET J. FOGARTY, *Geometric Invariant Theory*, Second enlarged edition, Springer, 1982.

[Mac] I. G. MACDONALD, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford Mathematical Monographs, 1979.

[0] T. ODA, *Convex bodies and Algebraic Geometry* (*An introduction to the theory of toric varieties*), Springer-Verlag, 1987.

[Pa] F. PAUER, *Plongements normaux de l'espace homogène* $SL(3)/SL(2)$. C. R. du 108ième Con. nat. Soc. sav. Grenoble (1983).

[Po] V. L. POPOV, *Contraction of the actions of reductive algebraic groups*, Math. of the USSR Sbornik **58** (1987), 311–335.

[PS] R. PIENE ET M. SCHLESSINGER, *On the Hilbert scheme compactfication of the space of twisted cubics*, Amer. J. of Math. (1985), 761–774.

[Sc1] H. SCHUBERT, *Kalkül der abzählenden Geometrie*, Reprint, Springer-Verlag, 1979.

[Sc2] ———, *Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen des dreidimensionalen Satzes, dass es* 2 *Strahlen gibt, welche* 4 *gegebene Strahlen schneiden*, Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft Hamburg **1** (1883), 87.

[Sc3] ———, *Anzahlbestimmungen für lineare Räume beliebiger Dimension*, Acta Math. **8** (1886), 97–118.

[Su] H. SUMIHIRO, *Equivariant completion*, J. Math. Kyoto Univ. **14** (1974), 1–13.

[Sw] R. G. SWAN, *Projective modules over Laurent polynomial rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **237** (1978), 111–120.

[Vin] E. B. VINBERG, *Complexity of actions of reductive groups*, Funct. Anal. Appl. **20** (1986), 1–13.

[V] T. VUST, *Plongements des espaces symétriques*, Manuscript, 1987.

INSTITUT FOURIER, B. P. 74, 38402 SAINT-MARTIN D'HERES, FRANCE